Bazele Electrotehnicii

3. Teoremele fundamentale ale electromgnetismului

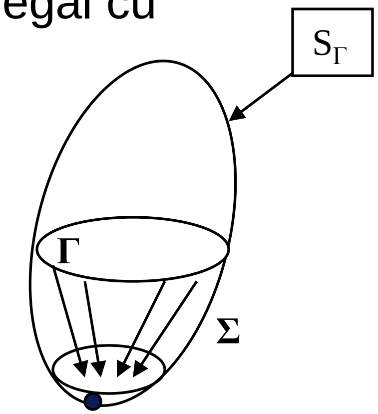
Daniel Ioan

Universitatea Politehnica din Bucuresti
PUB - CIEAC/LMN

daniel@lmn.pub.ro

3.1. Teorema conservarii sarcinii

1. Enunt: curentul electric ce paraseste orice suprafata inchisa este egal cu viteza de scadere a sarcinii din interiorul suprafetei.



2. Forma globala/integrala: $\boxed{i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}} \Leftrightarrow \oint_{\Sigma=\partial D_\Sigma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}\int_{D_\Sigma} \rho dv$

3. Demo:

Legea circuitului magnetic: $u_{m_\Gamma} = i_{s_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow 0 = i_\Sigma + \frac{d\psi_\Sigma}{dt}$

$$u_{m_\Gamma} = H_{tave} l_\Gamma \rightarrow 0, \psi_{S_\Gamma} \rightarrow \psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$$

Legea fluxului electric:

Forma locala in medii mobile: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \nabla \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \Rightarrow$$

4. Forma locala si integrala dezvoltata: $\boxed{\nabla(\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{\oint_{\Sigma=\partial D_\Sigma} (\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) d\mathbf{A} = -\int_{D_\Sigma(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv}$

5. In medii imobile: $\boxed{div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\Sigma=\partial D_\Sigma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = -\int_{D_\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv}$

Consecinte ale teoremei consevarii sarcinii

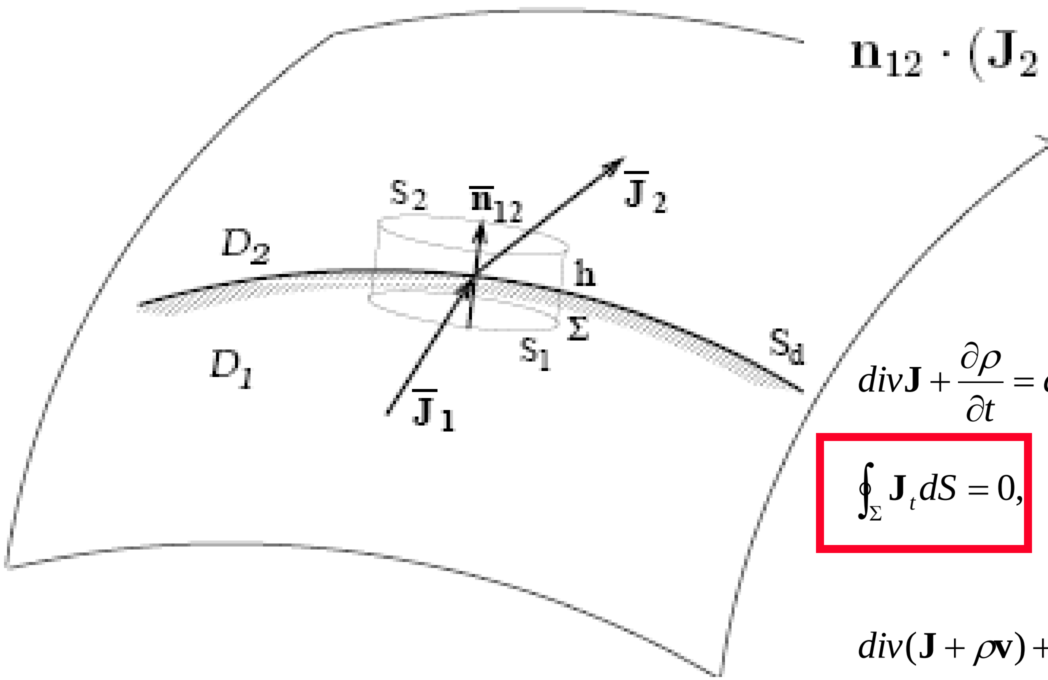
1. Forma locala pe suprafete de discontinuitate (interfete intre medii):

$$i_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = J_{nmed} hl - J_{1nmed} A + J_{2nmed} A,$$

$$\int_{D_\Sigma} \rho dv = \rho_{vmed} A h + \rho_{smed} A.$$

$$J_{nmed} \frac{hl}{A} + J_{2nmed} - J_{nmed} = \frac{d}{dt} \rho_{vmed} h - \frac{d\rho_{smed}}{dt}$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \qquad \boxed{div_s \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}}$$



2. Conservarea curentului total

In medii imobile:

$$div\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = div\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = div(\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) = \boxed{div\mathbf{J}_t = 0}$$

$$\boxed{\oint_\Sigma \mathbf{J}_t dS = 0,} \quad \text{unde } \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d, \mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

In medii mobile:

$$div(\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\mathbf{J}_t - 0; \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_v, \mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \mathbf{J}_v = \rho\mathbf{v}$$

Relaxarea sarcinii. Continuitatea curentului

2. In medii liniare omogene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J} = -\nabla(\sigma \mathbf{E}) = -\sigma \nabla \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \mathbf{D} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

sarcina scade rapid

(tinde exponential catre zero)

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho / \tau = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = \rho(0) e^{-t/\tau}}$$

$$\tau_{Cu} = \frac{1}{4\pi 9 10^{9} 60 10^{6}} = 1.5 10^{-19} \mathrm{s}$$

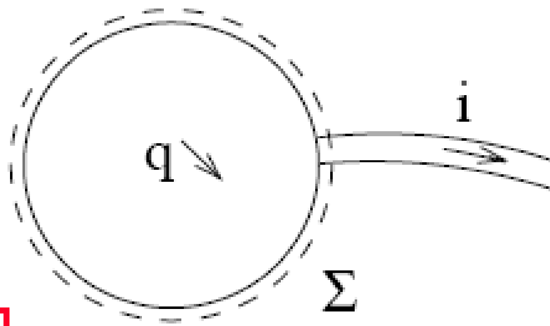
3. In regimul stationar:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

teorema conservarii

(continuitatii) curentului:

$$\boxed{\oint_{\Sigma = \partial D_\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{J} = 0}$$



4. In sisteme izolate electric:

sarcina este invarianta:

$$0 = i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} \Rightarrow \boxed{q_{D_\Sigma} = ct.}$$

5. Semnificatia fizica: Intre curent si sarcina exista o foarte stransa legatura (evidenta microscopic). Sarcina se conserva sau migreaza sub forma de curent.

Conservarea sarcinii este unul din cele mai generale adevaruri ale electromagnetismului, motiv pentru care este cunoscut si sub numele de legea conservarii sarcinii, chiar daca este o consecinta a celorlalte legi.

Aplicatii, probleme, exercitii

1. **In cat timp se anuleaza densitatea de sarcina intr-un conductor din Cu?**
2. **Justificati expresia curentului de deplasare folosind teorema conservarii sarcinii in incercarea de a generaliza teorema lui Ampere in regim variabil.**
3. **Cum sunt liniile de curent in regim stationar?**
4. **In ce conditii se conserva componenta normala a densitatii de curent la interfata intre doua corpuri? Dar componenta sa tangentiala?**
5. **Este distrusa sarcina intr-o explozie atomica?**
6. **Care lege este mai generala? Legea conservarii sarcinii sau cea a masei?**
7. **In teorema relaxarii, sarcina tinde catre zero. Unde dispare sarcina initiala?**
8. **Procedeu de masurare a sarcinii.** Conform teoremei conservarii sarcinii, curentul ce alimenteaza un corp izolat este egal cu derivata in imp a sarcinii. In consecinta sarcina cu care se incarca un corp se poate masura integrand in timp intensitatea curentului ce incarca acel corp. Rezulta ca aparatul de masura al sarcinii este alcatuit dintr-un aparat de masurare a curentului (ampermetru) si un integrator in timp. Pentru ca procedura sa fie completa mai este necesara o metoda pentru a verifica daca un corp este neutru. Dupa cum se va vedea ulterior, campul electric uniform actioneaza asupra unui corp cu o forta proportionala cu sarcina sa, deci cu o forta nula in cazul corpurilor neutre.

3.2.Teorema energiei el-mg - Poynting

1. Forma local a energiei in medii imobile

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \textbf{-H}$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E}rot\mathbf{H} - \mathbf{H}rot\mathbf{E} = \mathbf{J}E + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}}\times\mathbf{H}\right) + \nabla\left(\mathbf{E}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{H}}\right) = \mathbf{H}(\nabla\times\mathbf{E}) -$$

–

$$-\mathbf{E}(\nabla\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}rot\mathbf{E} - \mathbf{E}rot\mathbf{H}$$

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2}\right),$$

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{BH}}{2}\right)$$

$$\boxed{-div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{JE} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}\right),}$$

Forma integrala. Conservarea energiei el-mg

- $\boxed{p = \mathbf{J}\mathbf{E}}$ - densitatea de putere [W/m^3]
- $\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$ – vectorul Poynting [W/m^2]
- $w_e = \mathbf{D}\mathbf{E}/2$ – densitatea energiei electrice [J/m^3]
- $w_m = \mathbf{B}\mathbf{H}/2$ – densitatea energiei mg. [J/m^3]
- $\boxed{w_{em} = w_e + w_m}$ densitatea energiei el-mg

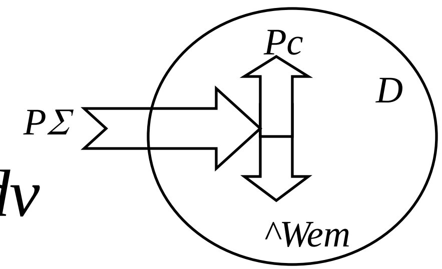
$$P_\Sigma = \int_{\partial D} \mathbf{S} d\mathbf{A} \; [W]$$

$$P_c = \int_D p dv \; [W]$$

$$W_{em} = \int_D w_{em} dv \; [J]$$

$$\boxed{div\mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{P_\Sigma = P_c + \frac{dW_{em}}{dt}}$$

$$\int_D div\mathbf{S} dv = \int_{\partial D} \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_D \left(p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t} \right) dv = \int_D p dv + \frac{d}{dt} \int_D w_{em} dv$$



Enunt: Puterea transferata de campul el-mg spre interiorul unui domeniu prin frontiera sa este egala cu puterea transferata corpurilor din domeniu plus viteza de variatie a energiei el-mg din domeniu.

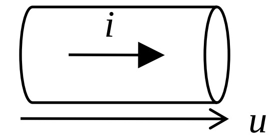
Semnificatie: Puterea/energia se conserva (in acord cu principiul I al termodinamicii). Campul el-mg acumuleaza si transporta energie si in vid.

Recapitularea teoremelor de conservale

Camp:	Sarcina	Energie
Global	$i_\Sigma = -\dfrac{dq_{D_\Sigma}}{dt}$	$P_\Sigma = P + \dfrac{dW_{em}}{dt}$
Integral	$\oint_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\dfrac{d}{dt}\int_{D_\Sigma} \rho dv$	$-\oint_\Sigma (\mathbf{E}\times\mathbf{H}) d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} dv + \dfrac{d}{dt}\int_{D_\Sigma}\left(\dfrac{\mathbf{DE}}{2}+\dfrac{\mathbf{BH}}{2}\right)dv$
Local diferential	$div\mathbf{J} = -\dfrac{d\rho}{dt}$	$-div\mathbf{S} = p_c + \dfrac{\partial w_{em}}{\partial t}$
Pe supr de dics.	$\mathbf{n}_{12}\cdot(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\dfrac{\partial \rho_s}{\partial t}$	
Conserv.	$J_{n1} = J_{n2}$	
Linii de camp	Liniile de curent sunt in regim stationar curbe inchise	Liniile vectorului Poynting indica directia si sensul transferului de energie el-mg

Aplicatii

Puterea transferata unui conductor parcurs de curent



$$P = -\int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} = \int_{S} \frac{u}{l} \frac{i}{2\pi r} dA = \frac{ui}{2\pi r l} 2\pi r l = \boxed{ui = P}$$

Energia electrica proprie a unei sfere electrizate

$$W = \int_{R^3} w_e dv = \int_{R^3} \frac{DE}{2} dv = \int_0^a \frac{D^2}{2\varepsilon} 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{D^2}{2\varepsilon_0} 4\pi r^2 dr = \int_0^a \left(\frac{qr}{4\pi a^3} \right)^2 \frac{4\pi r^2 dr}{2\varepsilon} + \int_a^\infty \left(\frac{q}{4\pi r^2} \right)^2 \frac{4\pi r^2 dr}{2\varepsilon_0}$$

$$\int_0^a \frac{q^2 r^4 dr}{8\pi\varepsilon a^6} + \int_a^\infty \frac{q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q^2 a^5}{40\pi\varepsilon a^6} + \frac{q^2 a^{-1}}{8\pi\varepsilon_0} = \boxed{\frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 a}(5 + 1/\varepsilon_r) = W_e}$$

Energia electrica a unei distributii arbitrare de sarcina in regim static

$$W_e = \int_{R^3} w_e dv = \int_{R^3} \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dv = -\frac{1}{2} \int_{R^3} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv =$$

$$-\frac{1}{2} \int_{R^3} [\nabla(V\mathbf{D}) - V\nabla\mathbf{D}] dv = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma \to \infty} (V\mathbf{D}) dA + \int_{R^3} \frac{\rho V}{2} dv = \boxed{\int_{R^3} \frac{\rho V}{2} dv = W_e} \Rightarrow W_e = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k V_k}{2}$$

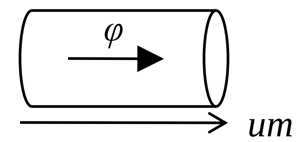
Calculati energia magnetica a unui conductor cilindric parcurs de curent

Calculati energia magnetica a unei distributii de curent

Aplicatii si intrebari

Energia unei armaturi magnetizate uniform

$$W_m = \int_\Omega \frac{BH}{2} dv = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\varphi}{A}\frac{u_m}{l} dv = \frac{\varphi u_m}{2Al}\int_\Omega dv = \boxed{\frac{\varphi u_m}{2} = W_m}$$



Calculati energia unei sarcini in camp electric

$$\text{Energia unei perechi punctiforme}: W_e = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2) = \frac{1}{2}(q_1V_{11} + q_1V_{12} + q_2V_{21} + q_2V_{21})$$

$$\text{Energia proprie fecarui corp}: W_{e1} = \frac{q_1V_{11}}{2}, W_{e1} = \frac{q_2V_{22}}{2},$$

$$\text{Energia de interactiune (a sarcinii in camp)}: W_{e12} = \frac{(q_1V_{12} + q_2V_{21})}{2} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon R} \Rightarrow \boxed{W_e = qV} = q\int_M^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

Aflati expresia densitatii de energie electrica/magnetica in medii neliniare.

Calculati energia unui mic corp polarizat/magnetizat permanent in camp electric/magnetic

$$\boxed{W_e = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}} \qquad \boxed{W_m = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}}$$

Aflati forma teoremei energiei pentru medii in miscare. Ce efecte mecanice ale campului rezulta din aceasta forma?

3.3. Prima teorema a fortelor generalizate

Lucrul virtual = Forta generalizata ori variatia coord.: $dL_k = X_k\, dx_k$

In particular:

$$dL = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \quad , \quad dL = \mathbf{C}\cdot d\boldsymbol{\alpha} \quad , \quad dL = \mathbf{T}\cdot \mathbf{n}\, dS \quad , \quad dL = p\cdot dV$$

Din primul principiu: In conditii de izolare electrica/magnetica ($\varphi = ct, \psi = ct$) lucrul mecanic se efectueaza pe baza scaderii energiei campului el-mg:

$$dL = \sum_{k=1}^{n} X_k\, dx_k = -\, dW_{em}\Big|_{\varphi=ct,\psi=ct} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\Big|_{\varphi=ct,\psi=ct} dx_k$$

$$\Rightarrow X_k = -\frac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\Bigg|_{\Psi=\text{const.},\, \Phi=\text{const.}} \Rightarrow \boxed{X_{k\,\text{el}} = -\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\Bigg|_{q=\text{const.}}} \quad , \quad \boxed{X_{k\,\text{mg}} = -\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\Bigg|_{\Phi=\text{const.}}}$$

Enunt: Campul electric/magnetic actioneaza asupra corpurilor cu forte generalizate egale cu minus derivata partiala a energiei electrice/magnetice fata de coordonatele generalizate asociate, derivate calculate considerand fluxurile electrie (sarcinile) /magnetice constante.

- Semnificatie fizica: teorema descrie efectul mecanic al campului el-mg.

Aplicatii

Forta Coulomb intre doua sarcini punctiforme in vid:

$$F=-\left.\frac{\partial W_e}{\partial R}\right|_q=-\frac{\partial(q_1V_{12}+q_2V_{21})/2}{\partial R}=-q_1\frac{\partial V_{12}}{\partial R}=-q_1\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=\boxed{\frac{q_1q_1}{4\pi\varepsilon_0R^2}=F\Rightarrow \mathbf{F}=q\mathbf{E}}$$

Forta Laplace, pe care o exercita campul magnetic asupra curentului:

$$\boxed{\mathbf{f}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}}\Rightarrow \mathbf{F}=\int_\Omega \mathbf{f}dv=\int_\Omega(\mathbf{J}\times\mathbf{B})dv$$

In cazul a doua condctoare paralele, forta Ampere:

$$F=i\int_C Bdr=\mu_0 i\int_C Hdr=\mu_0 iHl=\mu_0 iIl/(2\pi r)=\mu_0 i^2l/(2\pi r)=\boxed{2\cdot 10^{-7}i^2l/r=F_A}$$

Forta Lorenz

$$\mathbf{J}_v=\rho\mathbf{v}\Rightarrow \mathbf{f}=\rho\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Rightarrow \mathbf{F}=\int_\Omega \mathbf{f}dv=\int_\Omega(\rho\mathbf{v}\times\mathbf{B})dv=\boxed{q\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\mathbf{F}}$$

Forta unui electromagnet $F=-\left.\frac{\partial W_m}{\partial l}\right|_{\varphi=ct}=-\frac{\varphi}{2}\left.\frac{\partial u_m}{\partial l}\right|_{\varphi=ct}=-\frac{\varphi B}{2\mu_0}\boxed{=-\frac{\varphi^2}{2\mu_0 A}=F}$

Cuplul asupra corpurilor polarizate/magnetizate

$$C=-\left.\frac{\partial W_e}{\partial\alpha}\right|_{q=ct}=-\left.\frac{\partial(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})}{\partial\alpha}\right|_{q=ct}=pE\sin\alpha\Rightarrow\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{p}\times\mathbf{E};}\quad\boxed{\mathbf{C}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}}$$

Masurarea marimilor primitive

- **Curentul electric** se masoara cu balanta de curenti alcatuita din doua conductoare rectilinii si paralele parcurse de curentul de masurat, intre care se exercita forta lineica $F = I^2 l/(2\mu_0 d) = 2\cdot 10^{-7} I^2 N/m$
- **Sarcina electrica** se masoara prin procedeeul de neutralizare, numarand de cate ori se cuprinde in ea etalonul de sarcina, definit ca sarcina transportata de un curent unitar intr-un timp unitar.
- **Intensitatea campului el. in vid:** forta asupra sarcinii de proba $\mathbf{F} = q\mathbf{E};$
- **Inductia mag. in vid:** forta asupra sarcinii de proba in miscare $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B};$
- **Momentul electric :** cuplul in camp el. $\mathbf{C} = \mathbf{p}\times\mathbf{E};$
- **Momentul magnetic:** cuplul in camp mg. $\mathbf{C} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}.$

Note: $\mathbf{E}$ si $\mathbf{B}$ in corpuri sunt egale cu $\mathbf{E}$ si $\mathbf{B}$ din vidul unor fante alungite/plate

Procedeele de masurare ale acestor marimi se bazeaza exclusiv pe actiunile ponderomotoare ale campului eletro-magnetic. Celelelte marimi sunt:

$$\mathbf{J} = \mathbf{n}\frac{di}{dA};\quad \rho = \frac{dq}{dv};\quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv};\quad \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv};\quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P};\quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M};$$

$$u = \int_C \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}/q d\mathbf{r} = L/q;\quad u_m = \int_C \mathbf{H}d\mathbf{r};\quad \psi = \int_S \mathbf{D}d\mathbf{A};\quad \varphi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{A},$$

Cu observatia ca tensiunile si fluxurile in corpuri sunt egale cu cele din vidul unor fante practicate in jurul curbeleor si fuprafetelor de definitie (conform formeleor pe suprafete de discontinuitate ale legilot generale).

3.4.Condensatoare capacitati

Condensatorul: dispozitiv alcatuit din doua armaturi consuctoare separate de un dielectric izolant. Atunci cand este incarcat cele doua armaturi au sarcinile q1=+Q si q2=-Q, iar in dielectric liniile de camp pleaca perpendicular de pe prima si se opresc perpendicular pe cea negativa.

Caracterizare locala a campului electric al condensatorului: $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r})$ cu

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ in cazul condensatoarelor cu dielectrici liniari.

Caracterizare globala:

- Tensiunea intre armaturi: $$U = \int_{C12} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \Rightarrow U \propto \mathbf{E}$$
- Sarcina armaturii $$Q = \int_{\Sigma_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} \Rightarrow Q \propto \mathbf{D}$$

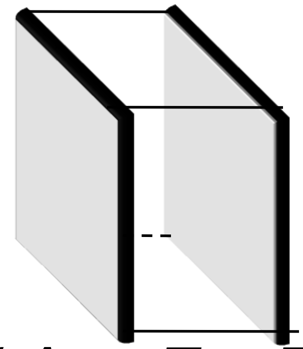
Enuntul teoremei condensatorului liniar: sarcina Q cu care este incarcat un condensator cu dielectric liniar este proportionala cu tensiunea U intre armaturile sale:

$$D \propto E \Rightarrow Q \propto U \Leftrightarrow \boxed{Q = CU} \Rightarrow C =_{def} \frac{Q}{U} = ct \quad [\mathrm{F}]$$

Prin definitie, capacitatea C a unui condensator este raportul dintre sarcina Q si tensiuea U. Capacitatea condensatoarelor liniare nu depinde de starea de lor de incarcare (Q sau U). Capacitatea C>0 este un parametru al condensatorului, care descrie capacitatea sa de a se incarca cu sarcina.

Condensatorul plan

Condensatorul plan: dispozitiv cu armaturile plane si paralele, suficient de apropiate, pentru a avea un camp uniform in dielectric.



Date: Aria armaturii A, distanta dintre armaturi d, permitivitatea dielectricului ε

Legea fluxului pe frontiera Σ a primei armaturi:

$$q_{D_\Sigma} = Q, \quad \psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \Rightarrow DA = Q \Rightarrow D = Q/A \Rightarrow E = D/\varepsilon = \frac{Q}{\varepsilon A}$$

$$\Psi_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{S1} \mathbf{D}d\mathbf{A} + \int_{S2} \mathbf{D}d\mathbf{A} + \ldots \int_{S6} \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{S1} D dA = D\int_{S1} dA = DA$$

Tensiunea electrica:

$$U = \int_{C12} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = E\int_{C12} dr = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon A} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon A Q}{dQ} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}}$$

formula de calcul a capacitatii condensatorului plan

Energia si forta

Energia electrica a cumulata de un condensator plan:

$$W_e = \int_\Omega w_e dV = \int_\Omega \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} dV = \frac{D^2}{2\varepsilon} Ad = \frac{Q^2}{2A\varepsilon} d = \frac{Q^2}{2C}$$

In general:

$$\boxed{W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}}$$

Forta:

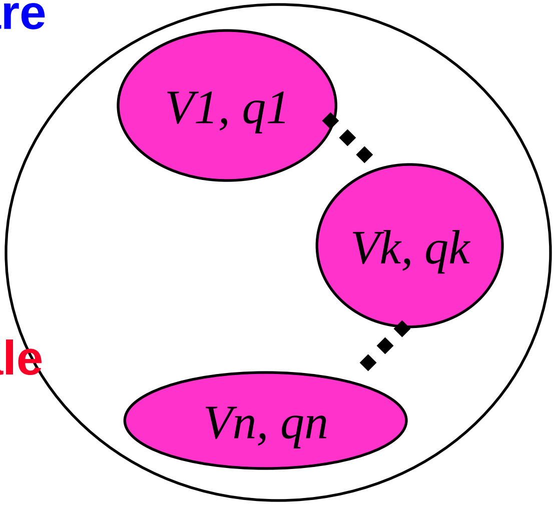
$$X_k = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right|_{q=ct} \Rightarrow F = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial d}\right|_{q=ct} = -\left.\frac{\partial[Q^2/(2C)]}{\partial d}\right|_{q=ct} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon A}$$

$$F = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial[1/C]}{\partial d} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial d} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d} = \left.\frac{\partial[CU^2/2]}{\partial d}\right|_{u=ct} = \left.\frac{\partial W_e}{\partial d}\right|_{u=ct} \Leftarrow \boxed{X_k = \left.\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right|_{u=ct}}$$

A doua teorema a fortelor generalizate - enunt: Forta generalizata cu care campul electric actioneaza asupra corpurilor este egala cu derivata partiala a energiei electrice fata de coordonata generalizata asociata, pentru tensiuni constante.

Generalizare

Se considera unul sau mai multe armaturi conductoare scufundate intr-un dielectric



Global, acest sistem este caracterizat de vectoriii:

sarcini: $\mathbf{q}=[q1,q2,\ldots,qn]^T$

potentiale: $\mathbf{v}=[v1,v2,\ldots,vn]^T$

Teorema lui Maxwell pentru capacitati: In cazul dielectricilor liniari, sarcinile sunt combinatii liniare ale potentialelor armaturilor: **Matricea capacitatilor**

$$\mathbf{q}=\mathbf{C}\mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = c_{11}\cdot v_1 + c_{12}\cdot v_2 + \ldots + c_{1n}\cdot v_n \\ q_2 = c_{11}\cdot v_1 + c_{12}\cdot v_2 + \ldots + c_{1n}\cdot v_n \\ \ldots \\ q_n = c_{n1}\cdot v_1 + c_{n2}\cdot v_2 + \ldots + c_{nn}\cdot v_n \end{cases}$$

Demo: potentialul din dielectric $V(\mathbf{r}) = \sum g(\mathbf{r}) v_j$ este superpozitia potentialelor produse pe rand de fiecare armatura v1, v2,…vn. Sarcina conductorului k este

$$q_k = \int_{\Sigma_k} D_n dS = -\int_{\Sigma_k} \varepsilon \frac{dV}{dn} dS = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Sigma_k} \varepsilon \frac{dg}{dn} v_j dS = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} v_j \quad \text{cu} \quad c_{kj} = -\int_{\Sigma_k} \varepsilon \frac{dg}{dn} dS$$

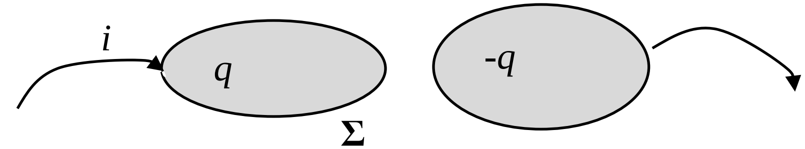
Condensatoare in regim variabil

Teorema conservarii sarcinii aplicata pe frontiera primei armaturi: $i_{\Sigma} = -i = -\dfrac{dq}{dt}$

Combinata cu teoarema condensatorului liniar: $q = Cu$

Rezulta **ecuatia in regim dinamic a unui condensator** (relatia intre curent si tensiune):

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt}}$$



Daca dielectricul condensatorului nu este un izolant imperfect, atunci acesta este strabatut de un curent de conductie proportional cu tensiunea dintre armaturi (constanta de proportionalitate G se numeste conductanta de pierderi). Acest curent se adauga la cel capacitativ (de deplasare) rezultand:

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt} + Gu}$$

In cazul unui condensator liniar (multipolar) cu mai multe armaturi vectorul curentilor din conductoarele care alimenteaza armaturile are expresia:

$\boxed{\mathbf{i} = \mathbf{C}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}}$ care in cazul dielectricului cu pierderi devine $\boxed{\mathbf{i} = \mathbf{C}\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{G}\mathbf{v}}$

Aplicatii

- Calculati capacitatea unui condensator cilindric (cablu coaxial)

$$\Psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \Rightarrow \oint_\Sigma \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = \int_{S_l} D dA = D 2\pi r l = q \Rightarrow D = \frac{q}{2\pi r l} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r l} \Rightarrow$$

$$u = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}}$$

Ce reprezintata cel patru marimi care intervin in aceasta formula ?

- Calculati capacitatea unui cablu bifilar (si forta intre fire la tensiunea U)

$$V_{fir} = \int_R^{R_0} E dr = \int_R^{R_0} \frac{q}{2\pi\varepsilon r l} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_0}{R} \Rightarrow V = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(q_1 \ln\frac{R_0}{R_1} + q_2\ln\frac{R_0}{R_2}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\left(\ln\frac{d}{a} - \ln\frac{a}{d}\right) = \frac{q}{\pi\varepsilon l}\ln\frac{d}{a} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln(d/a)}}$$

- Calculati matricea capacitatilor pentru doua sfere conductoare de raza mica
- Calculati capacitatile a trei sfere plasate la egala distanta in vid
- Potentialul unui sitem de conductoare in vid satisface ecuatia integrala:

$$\rho_s = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = \varepsilon_0\frac{dV}{dn}; V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V = \int_\Sigma \frac{\rho_s dA}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{V = \int_\Sigma \frac{dV}{dn}\frac{dA}{4\pi R}}$$

3.5. Rezistoare, rezistente

Rezistorul: dispozitiv alcatuit dintr-un conductor in care curentul poate intra si iesi prin doua parti disjuncte ale suprafetei lui numite borne, care sunt foarte bune conductoare astfel in cat fiecare este echipotentiala, cu V=V1, V=V2.

Campul stationar din rezistor este caracterizat local de: $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{J}(\mathbf{r})$ cu

$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ in cazul conductorilor liniari.

Caracterizare globala:

- Tensiunea intre borne: $$U = \int_{C12} \mathbf{E}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \Rightarrow U \propto \mathbf{E}$$
- Curentul rezistorului (conform teoremei conservarii curentului nu pedinde de pozitia suprafetei transversale Σ: $$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{r})\, d\mathbf{A} \Rightarrow I \propto \mathbf{J}$$

–

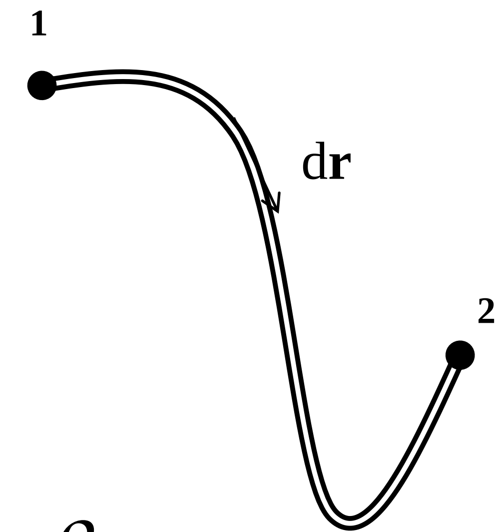
Enuntul teoremei rezistorului liniar: tensiunea U intre bornele unui rezistor este proportionala cu curentul I ce-l strabate:

$$\boxed{U = RI} \Rightarrow R =_{def} \frac{U}{I} = ct \quad [\Omega] \Leftrightarrow I = GU \Rightarrow G =_{def} \frac{I}{U} = \frac{1}{R} = ct \quad [S]$$

Prin definitie, rezisenta R a unui rezistor este raportul dintre tensiuea U curentul I. Inversa G a rezistentei este ca si R independenta de starea electrica (I sau U). Rezistenta R>0 este un parametru al rezistorului, care descrie rezistenta intampinata de curent la trecerea prin dispozitiv.

Rezistorul filiform liniar

Este un rezistor a carui lungime este mult mai mare decat diametrul sectiunii transversale. El este descris de C12 - curba sa mediana, si de felul in care variaza aria sectiunii sale transversale A(s) de-a lungul curbei. Presupunem cunoscut si modul de variatie rezistivitatii ρ(s).



La un rezistor filiform elementul de linie dr este paralel cu elementul dA al sectiunii transversale, iar liniile de curent sunt orientate in directia lor comuna.

Tensiunea electrica de-a lungul firului este:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} \rho \mathbf{J}d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} \rho J dr = \int_{C_{12}} \frac{\rho I}{A} dr = I \int_{C_{12}} \frac{\rho}{A} dr = RI$$

unde

$$I = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_S J dA = J \int_S dA = JA \Rightarrow J = I / A \quad \text{si} \quad \boxed{R = \int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A}}$$

este **formula de calcul a rezistentei firului**

Daca firul este omogen ρ(s).=ct si cu uniform A=ct, atunci

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

Puterea disipata

$$P = \int_\Omega \mathbf{J}\mathbf{E}dV = \int_{C_{12}} JEA dr = I \int_{C_{12}} E dr = UI \Rightarrow \boxed{P = RI^2 \geq 0}$$

Rezistorul filiform neliniar

Conductorul are acum relatia constitutiva $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \Rightarrow \mathbf{E} = \rho\mathbf{J} - \mathbf{E}_i$

Iar tensiunea electrica de-a lungul firului este:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} \rho \mathbf{J} d\mathbf{r} - \int_{C_{12}} \mathbf{E}_i d\mathbf{r} = I \int_{C_{12}} \frac{\rho}{A} dr - \int_{C_{12}} E_i dr = = RI - e$$

unde

$$R = \int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A}$$

este **rezistentei firului, iar**

–

$$\boxed{e = \int_{C_{12}} E_i dr}$$

$$\boxed{U = RI - e}$$

este t.e.m. a campului imprimat

Puterea disipata

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{JE} dV = \int_{C_{12}} JEAdr = i \int_{C_{12}} Edr = ui = (RI - e)i \Rightarrow \boxed{P = Ri^2 - eI}$$

contine un termen strict pozitiv (incalzirea ireversibila) si altul care descrie puterea reversibil corpului (de ex. Energia de incarcare a unui acumulator)

Generalizare

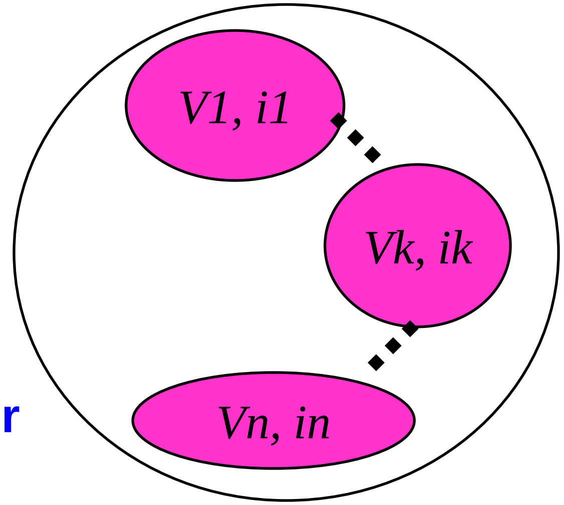
Se considera unul sau mai multe armaturi supraconductoare (sau cel putin foarte bune conductoarea) scufundate intr-un conductor

Global, acest sistem este caracterizat de vectoriii:

curenti: $\mathbf{i}=[i1,i2,\ldots,in]^T$

potentiale: $\mathbf{v}=[v1,v2,\ldots,vn]^T$

In cazul liniar, curentii sunt combinatii liniare ale potentialelor armaturilor: **Matricea conductantelor**



$$\mathbf{i}=\mathbf{G}\mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n} \\ \ldots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = g_{11}\cdot v_1 + g_{12}\cdot v_2 + \ldots + g_{1n}\cdot v_n \\ q_2 = g_{11}\cdot v_1 + g_{12}\cdot v_2 + \ldots + g_{1n}\cdot v_n \\ \ldots \\ q_n = g_{n1}\cdot v_1 + g_{n2}\cdot v_2 + \ldots + g_{nn}\cdot v_n \end{cases}$$

Demo: potentialul din dielectric $V(\mathbf{r})=\sum g(\mathbf{r})v_j$ este superpozitia potentialelor produse pe rand de fiecare armatura v1, v2,…vn. Curentul conductorului k este

$$i_k = \int_{\Sigma_k} J_n dS = -\int_{\Sigma_k} \sigma \frac{dV}{dn} dS = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Sigma_k} \sigma \frac{dg}{dn} v_j dS = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} v_j,\quad g_{kj} = -\int_{\Sigma_k} \sigma \frac{dg}{dn} dS \Rightarrow \boxed{\mathbf{G}=\mathbf{C}\big|_{\varepsilon\to\sigma}}$$

Aplicatii

- Calculati conductanta de pierderi a unui condensator cilindric (cablu coaxial)

$$\boxed{G = C\big|_{\varepsilon \to \sigma} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}}$$

Ce reprezintata cel patru marimi care intervin in aceasta formula ?

- Calculati conductanta de pierderi unui cablu bifilar

$$\boxed{G = \frac{\pi\sigma l}{\ln(d/a)}}$$

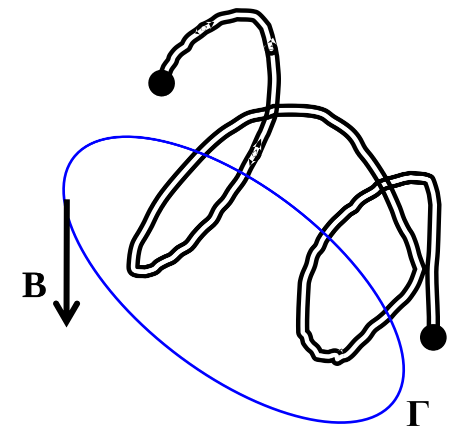
Ce reprezintata cel patru marimi care intervin in aceasta formula ?
Ce valoare are rezistenta dintre fire?

- Calculati matricea conductantelor pentru doua sfere supraconductoare de raza mica scufundate intr-un mediu conductor. Cum se calculeaza matricea rezistentelor?
- Calculati matricea conductantelor a trei sfere plasate la egala distanta intr-un mediu conductor.
- Cum se generealizeaza relatia intre curenti si tensiuni in cazul unui rezistor multipolar alcatuit dintr-un mediu conductor cu caracteristica de conductie afina (cu camp electric imprimat).

3.6.Bobine, inductivitati

Bobina: dispozitiv alcatuit dintr-un conductor infasurat in aer sau in jurul unui miez magnetizabil. Atunci cand este parcursa de curent bobina produce un camp magnetic care are liniile de camp curbe inchise ce inlantuie spirelele.

Local campul magnetic este descris de campurile vectoriale H si B. In medii liniare si izotrope acestea sunt proportionale si coliniare: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$



Caracterizare globala:

- Fluxul unei spire: $\varphi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} d\mathbf{A}$
- Fluxul total $\varphi = \int_{S=\bigcup S_k} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Rightarrow \varphi \propto \mathbf{B}$
- Tensiunea magneto motoare in regim stationar

$$u_{m\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = nI \Rightarrow i \propto \mathbf{H}$$

Enuntul teoremei bobinei liniare: fluxul magnetic produs de o bobina cu miez magnetic liniar este proportional cu curentul I ce strabate bobina:

$$\varphi \propto i \Rightarrow \boxed{\varphi = Li} \Rightarrow L =_{def} \frac{\varphi}{i} [H]$$

Prin definitie, inductivitatea L a unei bobine este raportul dintre fluxul sau total si curntul ce l-a produs. Inductivitatea L>0 este un parametru al bobinei, care descrie capacitatea sa de a produce flux magnetic.

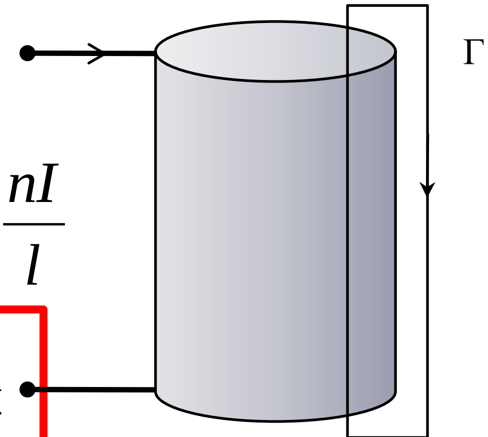
Inductivitatea solenoidului

Solenoid: bobina cu spirele identice, infasurate pe un cilindru de lungime mult mai mare dacat diametrul lui, astfel incat campul magnetic este practic uniform

Date: n – numarul de spire, A – aria sectiunii miezului

l – lungimea solenoidului, μ – permeabiltatea miezului

Teorema lui Ampere pe curba Γ:



$$u_{m\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{C1} \mathbf{H} d\mathbf{r} + \ldots + \int_{C4} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{C1} H dr = Hl = nI \Rightarrow H = \frac{nI}{l}$$

Fluxul total:

$$\varphi = \int_{S=\bigcup S_k} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = nBA = n\mu HA = \frac{n^2 \mu I A}{l} \Rightarrow \boxed{L = \frac{n^2 \mu A}{l}}$$

Energia campului magnetic:

$$W_m = \int_{\Omega} w_m dV = \int_{\Omega} \frac{BH}{2} dV = \frac{\mu H^2}{2} Al = \frac{\mu n^2 I^2 A}{2l} = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{\varphi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\varphi^2}{2L}}$$

Forta asupra bobinei:

$$X_k = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right|_{\varphi=ct} \Rightarrow F = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial l}\right|_{\varphi=ct} = -\frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial(1/L)}{\partial l} = -\frac{\varphi^2}{2\mu n^2 A} \Rightarrow$$

A doua teorema a fortelor generalizate:

$$X_k = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right|_{i=ct} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x_k}$$

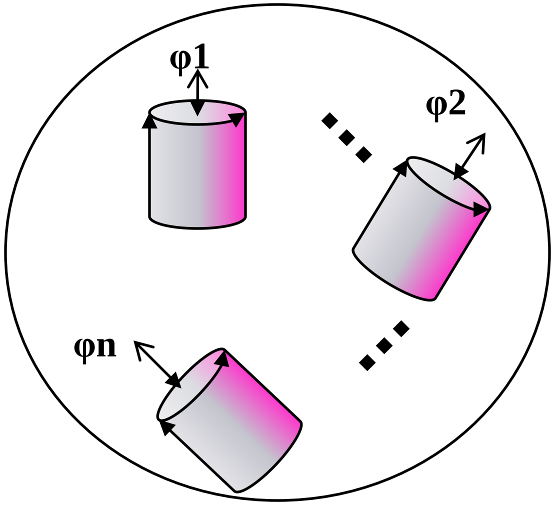
Generalizare. Inductante proprii si mutuale

Se considera un sistem format din n bobine

Global, acest sistem este caracterizat de vectoriii:

fluxurilor totale: $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n]^T$

curentilor: $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \ldots i_n]^T$



Teorema lui Maxwell pentru inductivitati: In cazul mediilor liniare, fluxurile sunt combinati liniare ale curentilor din bobine

Matricea inductantelor proprii si mutuale

$$\varphi = \mathbf{Li} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \ldots & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ i_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = L_{11} \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2 + \ldots + L_{1n} \cdot i_n \\ \varphi_2 = L_{11} \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2 + \ldots + L_{1n} \cdot i_n \\ \ldots \\ \varphi_n = L_{n1} \cdot i_1 + L_{n2} \cdot i_2 + \ldots + L_{nn} \cdot i_n \end{cases}$$

Demo: inductia magnetica $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{g}_j(\mathbf{r}) i_j$ este superpozitia inductiilor produse pe rand de fiecare bobina. Fluxul bobinei k este

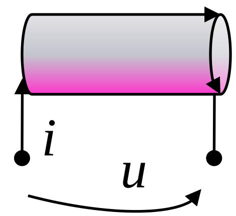
$$\varphi_k = \int_{S_k} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \int_{S_k} \mathbf{g}_j i_j d\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_j \quad \text{cu} \quad L_{kj} = \int_{S_k} \mathbf{g}_j d\mathbf{A}$$

Bobine in regim variabil

Legea inductiei electromagnetice aplicata de-a lungul conductorului bobinei

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi}{dt} = \int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C12\,fir} \mathbf{E}d\mathbf{r} + \int_{C21ext} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C12\,fir} \rho\mathbf{J}d\mathbf{r} - \int_{C12ext} \mathbf{E}d\mathbf{r} = ri - u$$

combinata cu teoarema bobinei liniaer: $\varphi = Li$



conduce la **ecuatia in regim dinamic a unei bobine,**
care exprima relatia dintre tensiune si curent:

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt} + Ri}$$

Tensiunea este suma unui termen inductiv (t.e.m. autoindusa) cu unul rezistiv.

In cazul unui sistem de bobine cuplate mutual, vectorul tensiunilor la bornele bobinelor are expresia (tensiunile contin in plus t.e.m. induse prin cuplaj):

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{Ri}} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = L_{11}\dfrac{di_1}{dt} + L_{12}\dfrac{di_2}{dt} + \ldots + L_{1n}\dfrac{di_n}{dt} + R_1 i_1 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots \\ u_n = L_{n1}\dfrac{di_1}{dt} + L_{n2}\dfrac{di_2}{dt} + \ldots + L_{nn}\dfrac{di_n}{dt} + R_n i_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = diag(R_1 \ldots R_n)$$

Aplicatii

- Calculati energia magnetica a unui cablu coaxial parcurs de curentul I si extrageti nductivitatea proprie a acestui cablu

$$W_m = \int_\Omega w_m dv = \int_\Omega \frac{BH}{2} dv = \int_0^b \frac{\mu_0 H^2}{2} 2\pi r l dr = \int_0^a \frac{\mu_0 (Ir/2\pi a^2)^2}{2} 2\pi r l dr + \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} l dr =$$

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left(\int_0^a \frac{r^3 dr}{a^4} + \int_a^b \frac{dr}{r}\right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)}$$

Ce reprezintata cel patru marimi care intervin in aceasta formula ?

Cum depinde inductivitatea “interna” de raza firului interior?

- Calculati inductivitatea proprie a unui cablu bifilar si apoi energia magnetica si forta dintre fire.

$$H = \frac{I}{2\pi R_1} - \frac{I}{2\pi R_2} \Rightarrow \varphi = \int_S B dA = \mu_0 l \int_a^d H ds = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d-s}\right) ds =$$

$$\frac{\mu_0 I l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \Rightarrow L = \frac{\varphi}{I} \approx \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a} \Rightarrow W_m = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow F = \left.\frac{\partial W_m}{\partial d}\right|_{I=ct} = \boxed{\frac{\mu_0 l I^2}{2\pi d} = F_A}$$

- Calculati inductantele proprii si mutuale a doi solenoizi coaxiali care au raze si numere de spire diferite, dar lungime egala cu cea a miezului comun.

$$L_{11} = n_1^2 \mu \pi r_1^2 / l; L_{22} = n_2^2\left(\mu \pi r_1^2 + \mu_0 \pi (r_2 - r_1)^2\right)/l; \boxed{L_{12} = L_{21} = n_1 n_2 \mu \pi r_1^2 / l}$$

Recapitularea dispozitiveleor electro-magnetice

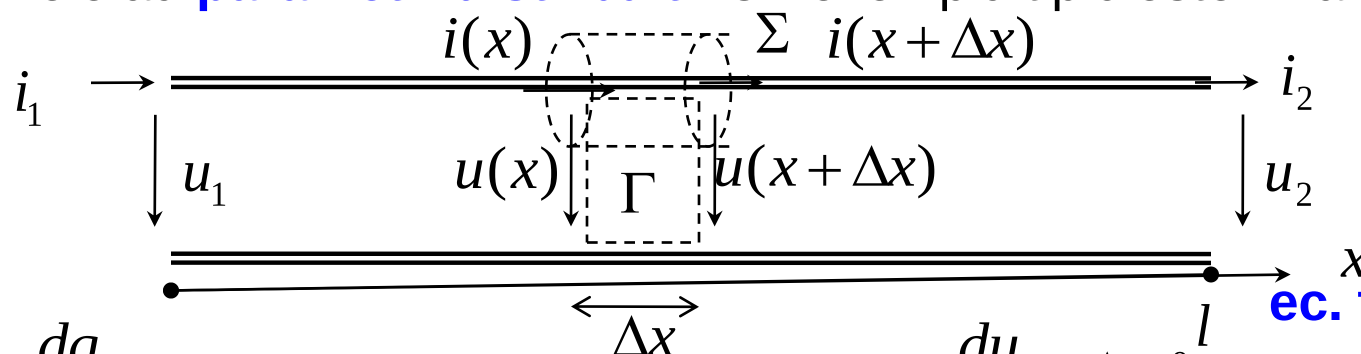
Camp	Electric	Conductie	Magnetic
Dispozitivul	Condensator	Rezistor	Bobina
Parametrul	Capacitate [F] $C=\frac{q}{u}$	Rezistenta [Ω] $R=\frac{u}{i}$	Inductivitate [H] $L=\frac{\varphi}{i}$
Relatie de calcul pt camp uniform	$C=\frac{\varepsilon A}{d}$	$R=\frac{\rho l}{A}$	$L=\frac{\mu n^2 A}{l}$
Energie/putere	$W_e=\frac{Cu^2}{2}=\frac{qu}{2}=\frac{q^2}{2C}$	$P=Ri^2=ui=\frac{u^2}{R}$	$W_m=\frac{Li^2}{2}=\frac{\varphi i}{2}=\frac{\varphi^2}{2L}$
Relatie curent-tensiune	$i=C\frac{du}{dt}+Gu$	$u=L\frac{di}{dt}+Ri-e$	$u=L\frac{di}{dt}+Ri$
Dispozitivul multipolar	$\mathbf{q}=\mathbf{C}\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{i}=\mathbf{C}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{G}\mathbf{v}$	$\mathbf{u}=\mathbf{R}\mathbf{i}$	$\varphi=\mathbf{L}\mathbf{i}\Rightarrow\mathbf{u}=L\frac{d\mathbf{i}}{dt}+\mathbf{R}\mathbf{i}$

Energii si forte - recapitulare

Camp	Electric	Magnetic
Energia	$W_e = \int_\Omega w_e dv, w_e = \frac{\mathbf{DE}}{2}$	$W_m = \int_\Omega w_m dv, w_m = \frac{\mathbf{BH}}{2}$
Prima teorema a fortelor generalizate	$X_k = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right\|_{q=ct}$	$X_k = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right\|_{\varphi=ct}$
A doua teorema a fortelor generalizate	$X_k = \left.\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right\|_{u=ct}$	$X_k = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x_k}\right\|_{i=ct}$
Corpuri cu sarcini/curenti	Coulomb $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B};$ Laplace $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$
Corpuri polarizate/magnetizate	$\mathbf{C} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}; \quad \mathbf{p} = \int_\Omega \mathbf{P} dv$	$\mathbf{C} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}; \ \mathbf{m} = \int_\Omega \mathbf{M} dv$

3.7. Linii de transmisie, cu parametri distribuiti

Dispozitivele anterioare se numesc **elemente cu parametri concentrati,** deoarece efectele capacitive, inductive si rezistive sunt separate. La frecvente inalte, efectele electrice si cele magnetice se "amesteca", iar sistemele au **parametri distribuiti.** Un exemplu tipic este linia de transmisie:



ec. telegrafistilor (Thomson)

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D\Sigma}}{dt} \Rightarrow i(x+\Delta x) - i(x) + u\Delta G = -\Delta C\frac{du}{dt} \xrightarrow{\Delta x \to 0}$$

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S\Gamma}}{dt} \Rightarrow u(x+\Delta x) - u(x) + i\Delta R = -\Delta L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\Delta x \to 0}$$

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{di}{dx} = C_l\dfrac{du}{dt} + G_l u; \\ -\dfrac{du}{dx} = L_l\dfrac{di}{dt} + R_l i; \end{cases}}$$

$$C_l = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}; G_l = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta G}{\Delta x}$$

$$L_l = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta L}{\Delta x}; R_l = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta R}{\Delta x}$$

Parametrii lineici (devin matrice la liniile multifilare)

3.8. Circuite electrice filiforme in regim stationar

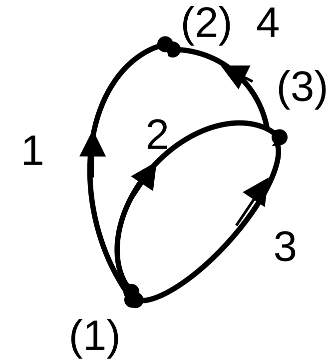
Circuit electric: o multime de elemente filiforme dipolare (cu doua borne-terminale) conectate intre ele pe la terminale.

Graful unui circuit: o multime de puncte numite noduri (care reprezinta teminalele elementelor) unite prin arce de curba numite laturi (care reprezinta elmentele dipolare). Pentru o descriere completa, laturile sunt orientate.

Graful descrie topologia circuitului. El poate fi obtinut prin retinerea curbelor mediane ale elementelor, dar ele nu este o figura geometrica ci una topologica.

In teoria circuitelor, spatiul fizic are doar o structura topologica si nu una metrica, asa cum se intampla in teoria campulu. Aici distantele si unghiurile nu au relevananta, fiind important doar modul de conexiune. Doua grafuri sunt echivalente daca descriu aceiasi conexiune.

Conventii tipografice:



- Laturile sunt indexate iar numarul este L: $l = 1,2,3,\dots,L$
- Nodurile sunt indexate iar numarul lor este N: $(n) = 1,2,3,\dots,N$
- Buclele (multime de laturi care alcatuiesc o curba inchisa)

sunt orientate si indexate: $[b] = 1,2,3,\dots,B$

Alcatuirea unui graf este dat de relatiile de incidenta laturi-noduri:

$$l \in (n) \quad \text{de ex.}: 1 \in (1), 1 \in (2), 2 \in (1), 2 \in (3), 3 \in (1),\ 3 \in (3), 4 \in (3), 4 \in (2)$$

sau laturi-bucle: $l \in [\mathrm{b}]$ Cale in graf: laturi ce alcatuiesc o curba deschisa.

Fundamentarea teoriei circuitelor filiforme

Marimile primitive:

- **Curentii din laturi,** componente ale vectorului: $\mathbf{i} = [i_1, i_2, ..., i_L]^T \in \mathbb{R}^L$
- **Tensiunile laturilor,** componente ale vectorului: $\mathbf{u} = [u_1, u_2, ..., u_L]^T \in \mathbb{R}^L$

Relatiile fundamentale ale teoriei (legile/axiomele):

- **Prima relatie (teorema) a lui Kirchhoff:**

Suma algebrica a curentilor care concura la un nod este nula:

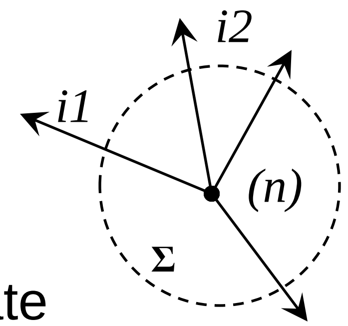
$$\boxed{\sum_{k \in (n)}^{A} i_k = 0}$$

Regula de semn: + pentru curentii care ies si in caz contrar.

Afirmatia este o consecinta a teoremei conservarii sarcinii, aplicata nodurilor:

–

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \oint_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k \in (n)} \int_{Sk} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k \in (n)}^{A} i_k = 0$$



- **A doua relatie (teorema) a lui Kirchhoff:** Suma algebrica a tensiunilor laturilor unei bucle este nula:

$$\boxed{\sum_{k \in [b]}^{A} u_k = 0}$$

Regula de semn: + pentru tensiunile orientate in sensul buclei , - in caz contrar.

Afirmatia este o consecinta a legii inductiei el-mg:

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt} = 0 \Rightarrow \oint_\Gamma E dr = \sum_{k \in [b]} \int_{Ck} E dr = \sum_{k \in [b]}^{A} u_k = 0$$

Teoria circuitelor filiforme – cont.

- **Reatiile constitutive ale teoriei – teorema Joubert:**

Tensiunea unei laturi depinde de curentul din latura astfel: $\boxed{u_k = \pm R_k i_k \pm e_k}$

Semnele se aleg in functie de orientarea sensurilor de referinta pentru tensiune, curent si t.e.m. Daca toate sunt orientate la fel, atunci $u_k = R_k i_k - e_k$

- **Teorema puterii transferate**

Laturile transfera pe la bornele lor puterea $\boxed{P_k = u_k i_k}$

Aceasta relatie este o consecinta a legii transferului de putere si a fost demonstrata la studiul elementelor dipolare .

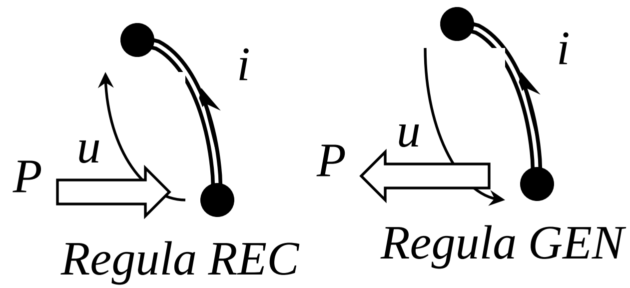
Sensul transferului se stabileste cu regulile:

- Regula de la receptoare (u si i au sensuri similare)

puterea P=ui este conventional consumata

- Regula de la generatoare (u si i au sensuri opuse)

puterea P=ui este conventional generata



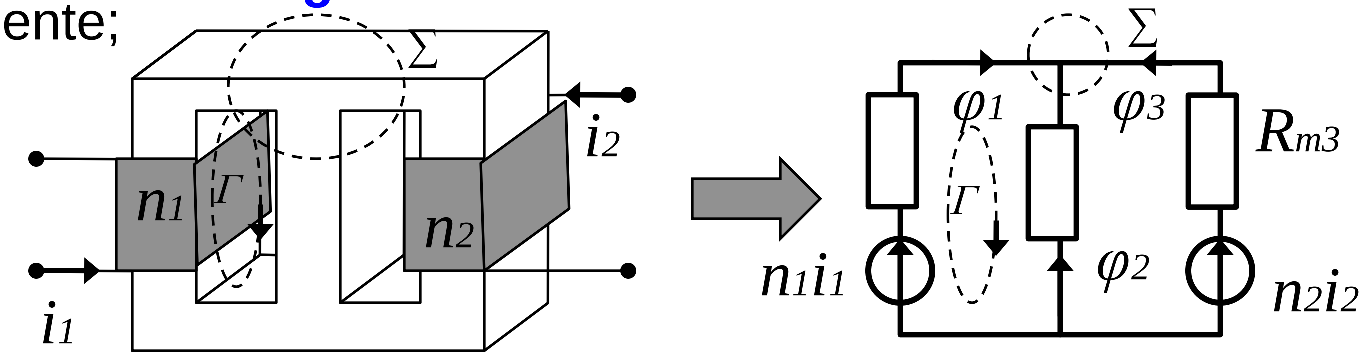
Nota: cele patru axiome ale teoriei circuitelor sunt de fapt teoareme in teoria campului. Teoria circuitelor (eventunefiliforme si in regim dinamic) este deci o sub-teorie a electromagnetismului, valabila in **ipotezele:**

1. Nodurile nu acumuleaza sarcina electrica;
2. Buclele au flux magnetic nul;
3. Fiecare borna este echipotentiala.

3.9. Circuite magnetice

Circuit magnetic: un sistem de armaturi magnetice si bobine montate pe ele, care dirijeaza campul magnetic astfel incat acesta nu disperseaza in aer ci strabate doar intrefierurile existente.

Graful unui circuit magnetic este alcatuit din liniile mediane ale tronsoanelor componente;



Starea magnetica a unui tronson este descrisa de marimile gllobale:

Fluxul magnetic fascicular: $\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A}$ definita pe o sectiune transversala S

Tensiunea magnetica: $u_m = \int_s \mathbf{H} d\mathbf{r}$ definita pe o curba longitudinala exterioara bobinei

Ecuatiile fundamentale ale circuitelor magnetice in reginm stationar sunt:

- **Relatia lui Kirchhoff pentru fluxuri magnetice:**

$$\boxed{\sum_{k\in(n)}^{A} \varphi_k = 0}$$

Demonstratie: LFM $\varphi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{B} d\mathbf{A} = \sum_{k\in(n)}^{A} \int_{S_k} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \sum_{k\in(n)}^{A} \varphi_k = 0$

Circuite magnetice (cont)

- **Relatia lui Kirchhoff pentru tensiuni magnetice:**
- Demonstratie: Teorema lui Ampere:

$$\boxed{\sum_{k\in[b]}{}^{A} u_{mk} = 0}$$

$$u_{m\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{H}d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]}{}^{A} \int_{C_k} \mathbf{H}d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]}{}^{A} u_{mk} = i_{S_\Gamma} = 0$$

deoarece prin SΓ nu trece curent.

- **Relatia lui Ohm pentru circuite magnetice liniare :**

$$\boxed{u_m = R_m \varphi}$$

Demonstratie: Forma globala a legii legaturii B-H pe tronson:

$$u_{mk} = \int_{C_k} \mathbf{H}d\mathbf{r} = \frac{B}{\mu}\int_{C_k} dr = \frac{\varphi_k l}{\mu A} = R_{mk}\varphi_k ; R_{mk} = \frac{l}{\mu A}$$

reluctanta tronsonului cilindric cu camp uniform

- **Relatia lui Joubert pentru circuite magnetice:**

$$\boxed{u_m = \pm R_m \varphi \pm \theta}$$

Demonstratie: Teorema lui Ampere:

$$u_{m\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{H}d\mathbf{r} = u_{mk} - R_{mk}\varphi_k = i_{S_\Gamma} = n_k i_k = \theta_k$$

solenatia bobinei [Asp]

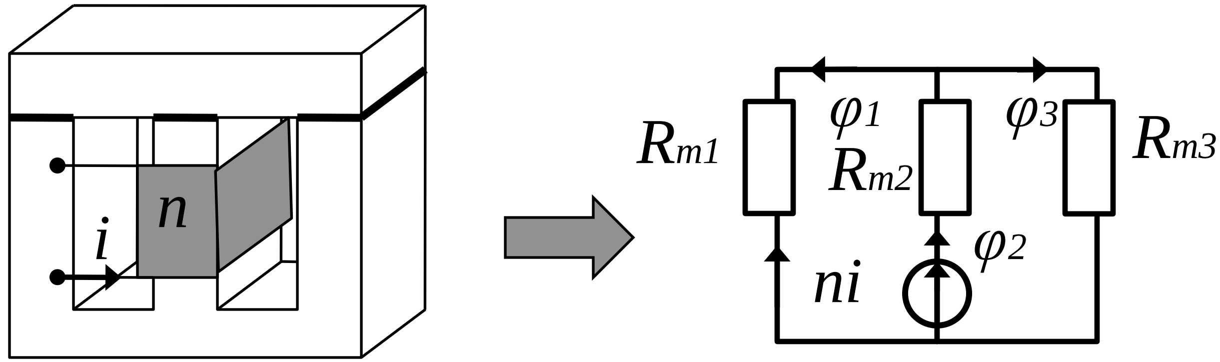
- **Energia acumulata de un tronson:**

$$W_m = \int_{\Omega} w_m dV = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{BH}}{2} dV = \frac{BH}{2}\int_{\Omega} dV = \frac{BHAl}{2} = \frac{\varphi_k u_{mk}}{2}$$

$$\boxed{W_m = \frac{\varphi\, u_m}{2}}$$

Aplicatie. Inductanta bobinei cu miez de fier. Forta electromagnetului

Se considera o bobina cu n spire montata pe un miez feromagnetic foarte permeabil, care are aria sectiunii A si intrefierul δ.



$$\varphi_2 = \frac{ni}{R_{me}}; R_{me} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = R_\delta + R_\delta / 2 = \frac{3\delta}{2\mu_0 A}; R_{Fe} = \frac{l}{\mu A} \to 0 \Rightarrow$$

$$L = \frac{n\varphi_2}{i} \Rightarrow \boxed{L = \frac{n^2}{R_{me}}}$$

inductanta bobinei este patratul numarullui de spire supra reluctanta magnetica echivalenta a miezului

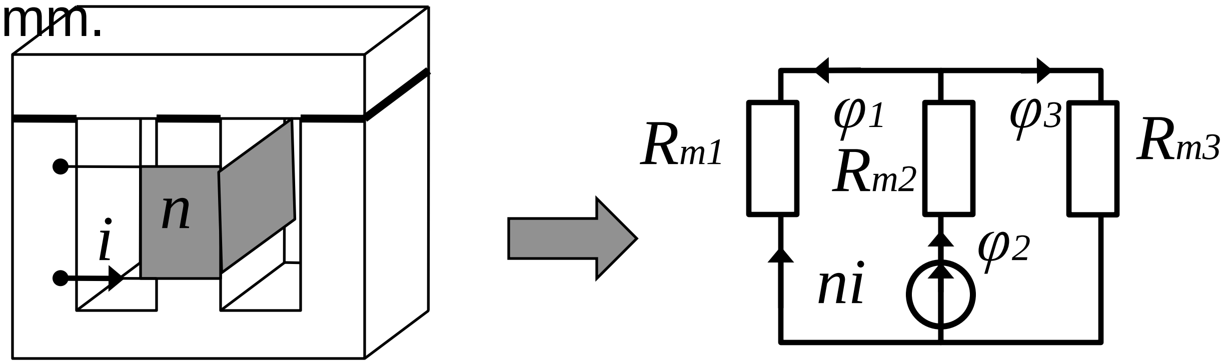
Energia permite calculul fortei portante a electromagnetului:

$$W_m = (R_{m1}\varphi_1^2 + R_{m2}\varphi_2^2 + R_{m1}\varphi_3^2)/2 \Rightarrow F = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right|_{\varphi = ct} = -\sum \frac{\partial R_{mk}}{\partial \delta}\frac{\varphi_k^2}{2} = -\boxed{\sum \frac{\varphi_k^2}{2\mu_0 A} = F}$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_2 / 2$$

Aplicatie numerica.

Se considera o bobina parcursa de curentul i=1mA, cu n=100 spire montata pe un miez feromagnetic foarte permeabil, care are aria sectiunii A=1cm^2 si intrefierul δ=0.5mm.



$$R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 A} = \frac{0.5e-3}{\pi \cdot 4e-7 \cdot 1e-4} = \frac{1e8}{\pi \cdot 8} = 3.98e6H^{-1};$$

$$R_{me} = 3R_\delta / 2 = 5.96e6H^{-1}; \varphi_2 = \frac{ni}{R_{me}} = \frac{100e-3}{5.96e6} = 16.78e-9Wb$$

$$B = \varphi_2 / A = 0.167mT; L = n^2 / R_{me} = 1e-2/3.98H = 2.512mH$$

$$F = \frac{\varphi_1^2}{2\mu_0 A} + \frac{\varphi_1^2}{2\mu_0 A} + \frac{\varphi_1^2}{2\mu_0 A} = \frac{\varphi_2^2(1+/2)}{2\mu_0 A} = \frac{3\varphi_2^2}{16e-11} = \frac{3\varphi_2^2}{16e-11} = 522N$$

Similitudinea intre circuitele electrice si cele magnetice

Teorii similare: doua teorii care au matematic aceleasi ecuatii fundamentale, dar marimile care intervin au semnificatii fizice si simboluri diferite.

Teoria circuitelor magnetice este similara cu teoria circuitelor electrice.

Tabelul de similitidine intre cele doua teorii:

Circuite electrice		Circuite magnetice	
Curent electric	$i[A]$	Flux magnetic	$\varphi[Wb]$
Tensiune electrica	$u[V]$	Tensiune magnetica	$u_m[A]$
Rezistenta electrica	$R = \frac{\rho l}{A}[\Omega]$	Reluctanta magnetica	$R_m = \frac{l}{\mu A} = R\big\vert_{\sigma \to \mu}[H^{-1}]$
T.e.m.	$e[V]$	T.m.m. – solenatia	$\theta = ni[Asp]$
Putere electrica	$P = ui$	Dublul energiei magnetice	$2W_m = \varphi\, u_m$

3.10.Ecuatiile lui Maxwell. Unicitatea solutiei (optional)

Enunt: Ecuatiile lui Maxwell (formele locale ale legilor) in medii liniare cu $\mu, \varepsilon, \sigma>0$ si surse permanente:

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_V, & \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_p & \mathrm{J} = \sigma(\mathrm{E}+\mathrm{E}_i) \\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, & \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}_p \end{cases}$$

au o solutie unica in domeniul D marginit de Σ pentru $0<t<T$, daca sunt date:

- Sursele interne de camp (SC): $\boldsymbol{Pp}(\mathbf{r},t)$; $\boldsymbol{Mp}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{r} \in D$, $t \in [0,T]$;
  $\boldsymbol{Ji}(\mathbf{r},t) = \sigma \boldsymbol{Ei}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{r} \in D$, $t \in [0,T]$;
- Conditiile de frontiera pe Σ (CΣ): $\boldsymbol{E}_t(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{r} \in S_E$; $\boldsymbol{H}_t(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{r} \in S_H = \Sigma - S_E$, $t \in [0,T]$;
- Conditiile initiale (C0): $\boldsymbol{B}(\mathbf{r},0)$; $\boldsymbol{D}(\mathbf{r},0)$, $\boldsymbol{r} \in D$, for $t = 0$.
- Formulare corecta: existenta, unicitatea si stabilitatea solutiei.

Demonstratia unicitatii este bazata pe lema solutiei triviale:

Ecuatiile Maxwell cu SC, CΣ, C0 nule au doar solutia nula

$$\int_D \sigma \mathrm{E}\cdot\mathrm{E}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_{D_\Sigma}\left(\frac{\mu \mathrm{H}\cdot\mathrm{H}}{2}+\frac{\varepsilon \mathrm{E}\cdot\mathrm{E}}{2}\right)dV = \int_D \mathrm{E}\cdot\cancel{\mathrm{J}_i}\,dV - \int_{D_\Sigma}\left(\mu_0 \mathrm{H}\cdot\frac{\partial \cancel{\mathrm{M}_p}}{\partial t} + \mathrm{E}\cdot\frac{\partial \cancel{\mathrm{P}_p}}{\partial t}\right)dV - \oint_\Sigma \left(\mathrm{E}\cancel{\times}\mathrm{H}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\int_D \sigma \mathrm{E}^2 dV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_\Sigma}\left(\mu \mathrm{H}^2+\varepsilon \mathrm{E}^2\right)dV = 0 \Rightarrow 0 \le \int_{D_\Sigma}\left(\mu \mathrm{H}^2+\varepsilon \mathrm{E}^2\right)dV = -2\int_0^t\int_D \sigma \mathrm{E}^2 dV \le 0 \Rightarrow \mathrm{H}=0, \mathrm{E}=0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{D}=0, \mathrm{B}=0, \mathrm{J}=0, \rho=0$$

Pentru existenta se foloseste forma slaba a ecuatiilor.

3.11. Problema fundamentala, teorema superpozitiei (optional)

Problema fundamentala a analizei campului el-mg: sa se gaseasca: F = [E, D, B, H, J, ρ] solutie a ecuatiilor lui Maxwell in domeniul *D* cu frontiera Σ= *SE* + *SH,* cunoscand sursele de camp interne, externe si trecute descrise de conditiile: C = [CS, CΣ, C0].

Enunt: in medii liniare cu μ, ε, σ>0 operatorul cauzal care leaga sursele de camp de solutia ecuatiilor este un operator liniar:

$$\boxed{S\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathbf{C}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k S(\mathbf{C}_k)} \Rightarrow$$

S: C → F este un operator bine definit pentru orice problema de camp corect formulata, care satisfacuta teorema de unicitate a solutiei.

–

Doua solutii F1 and F2 ale aceleiasi probleme trebuie sa fie egale, deoarecea F=F1-F2 satisface aceleiasi ecuatii dar cu surse nule (C=0), deci conform lemei solutiei triviale F=0 → F1=F2.

$$\mathbf{C}_k \to \mathbf{F}_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathbf{C}_k \to \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \mathbf{F}_k$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \to \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\lambda\mathbf{C} \to \lambda\mathbf{F}$$

$$S(0) = 0$$

Suma cauzelor determina suma efectelor, dar numai in medii liniare.

- *De notat ca in aceasta problema, J si* ρ sunt solutii si nu surse*!*

- *Demo: operatorul este liniar deoarece ecuatiile sunt liiniare. Superpoztia se aplica doar surselor de camp. NU este valabila superpozitia domeniilor, frontierelor sau materialelor.*

Aplicatii

Exmple de probleme bine formulate:

O cutie paralelipipedica cu peretii foarte buni conductori in interiorul careia se afla un mediu liniar. Campul electric si cel magnetic sunt initala nule. Identificati sursele interne, conditiile de frontiera si cele initiale. Ce puteti spune despre campul electromagnetic din interior in conditiile in care mediul este conductor si in cenditiile in care mediul este izolant.

Presupuneti ca in problema anterioara se afla in interiorul cutiei o spira parcursa de un curent cunoscut.

Cum se modifica conditiile de frontiera daca unul din pereti este un mediu cu permeabilitate foarte mare

Formulati corect o problema de camp elctromagnetic pentru camera in care va aflati.

Exemple de superpozitii:

Calculati prin superpozitie campul electric produs de o distributie arbitrara de sarcini electrice.

Superpozitie gresita:

Campul electric produs de doua corpuri electrizate si cu permeabilitati diferite nu se obtine prin superpozitia campurilor produse de fiecare corp in absemta celuilalt. Cum trebuie aplicata in mod corect superpozitia in acest caz?

3.12.Unitati de masura el-mg -SI

Marimea	unitate	Explicatie
Curentul i	A	Fundamentala
Densitatea de curent J	A/m2	$i = \int_s \mathbf{J} d\mathbf{A}$
Sarcina q	C = As	$i_\Sigma = -\frac{dq_{D\Sigma}}{dt}$
Densitatea de sarcina ρ	C/m3	$q = \int_\Omega \rho dv$
Tensiunea V	V = W/A	$P = ui$
Intensitatea cmp el E	V/m	$u = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}$
Fluxul electric ψ	C	$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$
Inductia electrica D	C/m2	$\psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A}$
Tensiunea magnetica Um	A	$u_{m\Gamma} = i_{S\Gamma}$
Intensitatea cmp mg H	A/m	$u_m = \int_C \mathbf{H} d\mathbf{r}$
Fluxul magnetic φ	Wb=Vs	$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S\Gamma}}{dt}$
Inductia magnetica B	T=Wb/m2	$\varphi = \int_S B d\mathbf{A}$

Unitati de masura el-mg (cont.)

Marimea	Unitate de masura	Explicatie
Polarizatie P	C/m2	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
Momentul electric p	Cm	$\mathbf{p} = \int_\Omega \mathbf{P} dv$
Magnetizatie M	A/m	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$
Momentul magnetic m	Am2	$\mathbf{m} = \int_\Omega \mathbf{M} dv$
T.e.m. imprimata ei	V	$e_i = \int_\Gamma \mathbf{E}_i d\mathbf{r}$
Camp imprimat Ei	V/m	$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$
Capacitatea C, perm. ε	F, F/m	$C = q / u = \varepsilon A / d$
Rezistenta R	Ω=V/A	$R = u / i$
Rezistivitate ρ	Ωm	$R = \rho l / A$
Conductanata G	S=1/Ω	$G = 1 / R$
Conductivitate σ	S/m	$\sigma = 1 / \rho$
Inductivitatea L	H=Wb/A	$L = \varphi / i$
Permeabilitatea μ	H/m	$L = \mu n^2 A / l$

Unitati de masura el-mg (cont.)

Definitiile unitatilor de masura din SI date anterior se citesc astfel:

1A-Amperul este curentul care in balanta de curent (alcatuita din doua conductorare filiforme, rectilinii situate in vid la distanta de un metru) produce o forta de 2e-7N pe fiecare metru de conductor

1C-Coulombul este sarcina transportata de un curent de 1A timp de o secunda

1V-Voltul este tensiunea la bornele unui dispozitiv care consuma 1W atunci cand este parcurs de un curent de 1A

1Wb-Weberul este fluxul magnetic de pe o suprafata , care atunci cand scade univorm catre zero in timp de 1s produce pe frontiera suprafetei o t.e.m. de 1V

1T-Tesla este inductia unui camp magentic uniform care are pe o suprfata transversala cu aria de 1m2 un flux magnetic de 1Wb

1F-Faradul este capcitatea unui condensator liniar care este incarcat cu 1C, atunci cand are tensiunea intre armaturi de 1V

1Ω-Ohmul este rezistenta unui conductor liniar, care este strabatut de 1A atunci cand are tensiunea la borne de 1V

1S-Siemensul este unui conductor liniar, care este strabatut de 1A atunci cand are tensiunea la borne de 1V

1H-Henryul este inductivitatea unei bobine care produce fluxul de 1Wb atunci cand este strabatuta de curentul de 1A

Constantele universale ale el-mg

1. **Viteza luminii in vid:** $c_0 = 299{,}792{,}458 m/s$, valoare exacta din 1983, cand metrul [m], unitatea de lungime din SI este definit ca spatiul parcurs de o unda luminoasa in vid in timp de 1/c secunde.

2. **Permeabilitatea vidului** $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ valoare exacta, din 1948, cand a fost adoptata definitia unitatii SI pentru curent Amperul,

   pe baza formulei fortei lui Ampere: $F = \mu_0 I^2 l/(2\pi d)$

3. **Permitivitatea vidului** $\varepsilon_0 = 1/(c_0^2 \mu_0) = 8.854187817620... \times 10^{-12}$ F/m

valoare exacta, deoarece viteza lumunii in vid este $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

4. **Constanta lui Faraday:** ***F*** **= 96,485.3365 C/mol**

este corelata cu alte doua constante universale: F = e N_A , unde e este

5. **Sarcina elementara** ***(a electronului) e*** **≈ 1.6021766×10^{-19} C;**

6. ***N_A*** **≈ 6.022141×10^{23} mol^{-1}** **Numarul lui Avogadro,** care reprezinta numarul de particule dintr-un mol de substanta.

7. **Constanta lui Plank h = 6.62606957(29)×10^{-34} Js** este constanta de proportonalitate dintre energia unui foton (cuanta de unda electromagnetica) si frecventa sa: E=hν

Importanta constantei lui Plank este evidentiata si in:

http://en.wikipedia.org/wiki/Watt_balance

Istoria SI si lupta pentru acuratetea masurarii ilustreaza o fascinata realizare a speciei omenesti.

3.13. Regimurile campului el-mg

Regim al campului el-mg: stare particulara a campului. In care anumite fenomene ele-mg dispar sau sunt neglijabele. Ecuatiile fundamentale ale fiecarui regim se obtin din legile campului in ipotezeel simplificatoare specifice regimului. Problemele regimurilor particulare sunt mult mai simple decat cele din cazul general. Cele mai importante regimuti intalnite in practica sunt**:**

1. **Regimul electrostatic – campul electric in corpuri imobile, regim stationar si fara transformari de energie**
2. **Regimul magnetostatic – campul magnetic in corpuri imobile, regim stationar si fara transformari de energie**
3. **Regimul electrocinetic stationar - distributia curentului electric stationar in corpuri imobile**
4. **Regimul magneto-stationar - campul magnetic stationar in corpuri imobile**
5. **Regimul magneto-qvasistationar - campul magnetic lent variabil in corpuri imobile**
6. **Regimul electro-cvasistationar - campul electric lent variabil in corpuri imobile**
7. **Regimul general variabil in medii imobile –campul elctromagetic in medii imobile**

Sinteza: relatii cauzale – fenomene el-mg fundamentale

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
2. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
5. $\mathbf{D} = \varepsilon\ \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$
6. $\mathbf{B} = \mu\ \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$
7. $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$

Ecuatiile lui Maxwell

8. $p = \mathbf{EJ}$
9. $\boldsymbol{\delta} = k\mathbf{J}$
10. $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$
11. $X_k = -\left.\dfrac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\right|_{q,\varphi=ct}, W_{em} = \int_\Omega \left(\dfrac{\mathbf{DE}}{2} + \dfrac{\mathbf{BH}}{2}\right) dv$

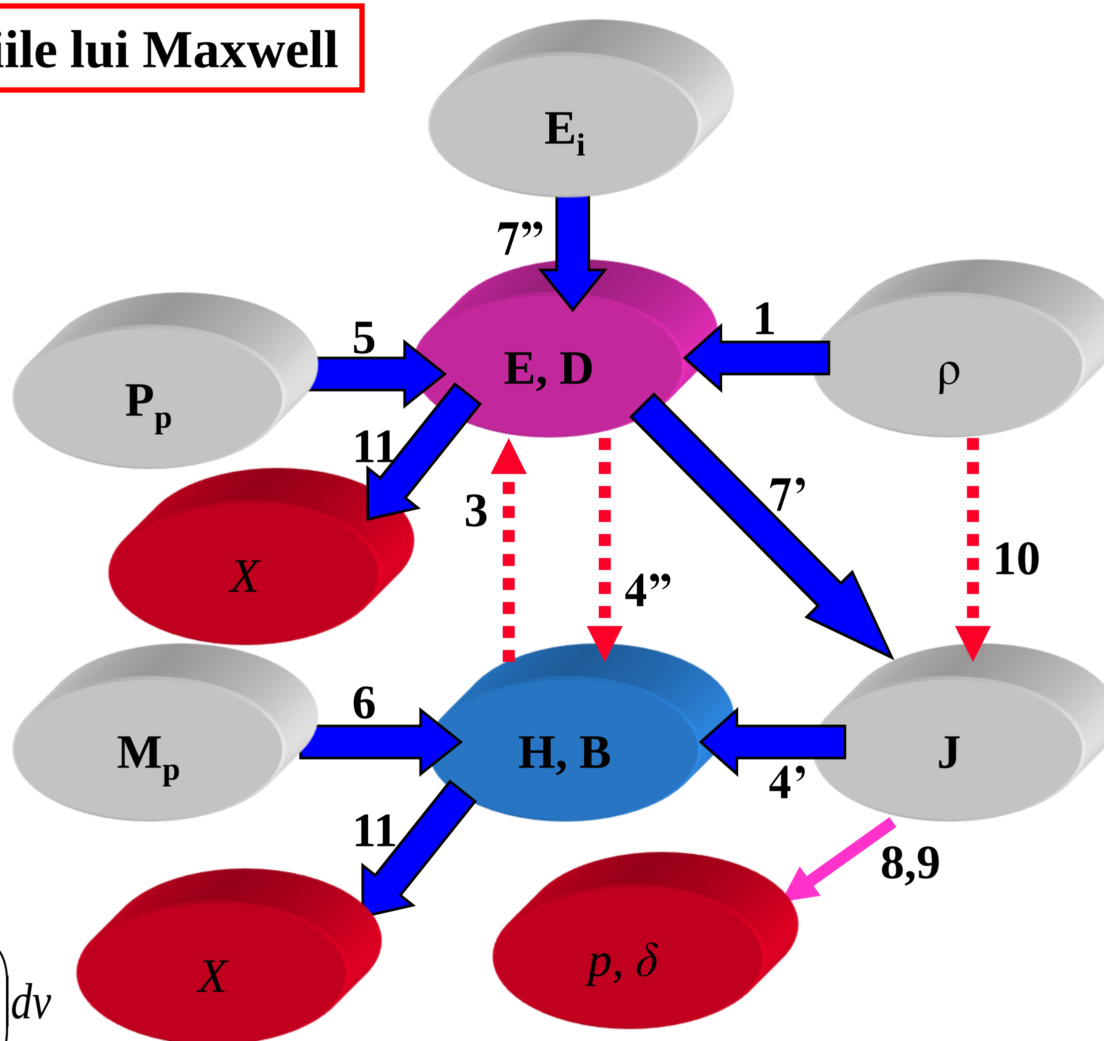


Diagrama regimurilor statice

$$1.\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$2.\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$3.\ \nabla \times \mathbf{E} = \cancel{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

$$4.\ \nabla \times \mathbf{H} = \cancel{\mathbf{J}} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

$$5.\ \mathbf{D} = \varepsilon\, \mathbf{E} + \mathbf{P}_p(\mathbf{E})$$

$$6.\ \mathbf{B} = \mu\,(\mathbf{H} + \mathbf{M}_p(\mathbf{H}))$$

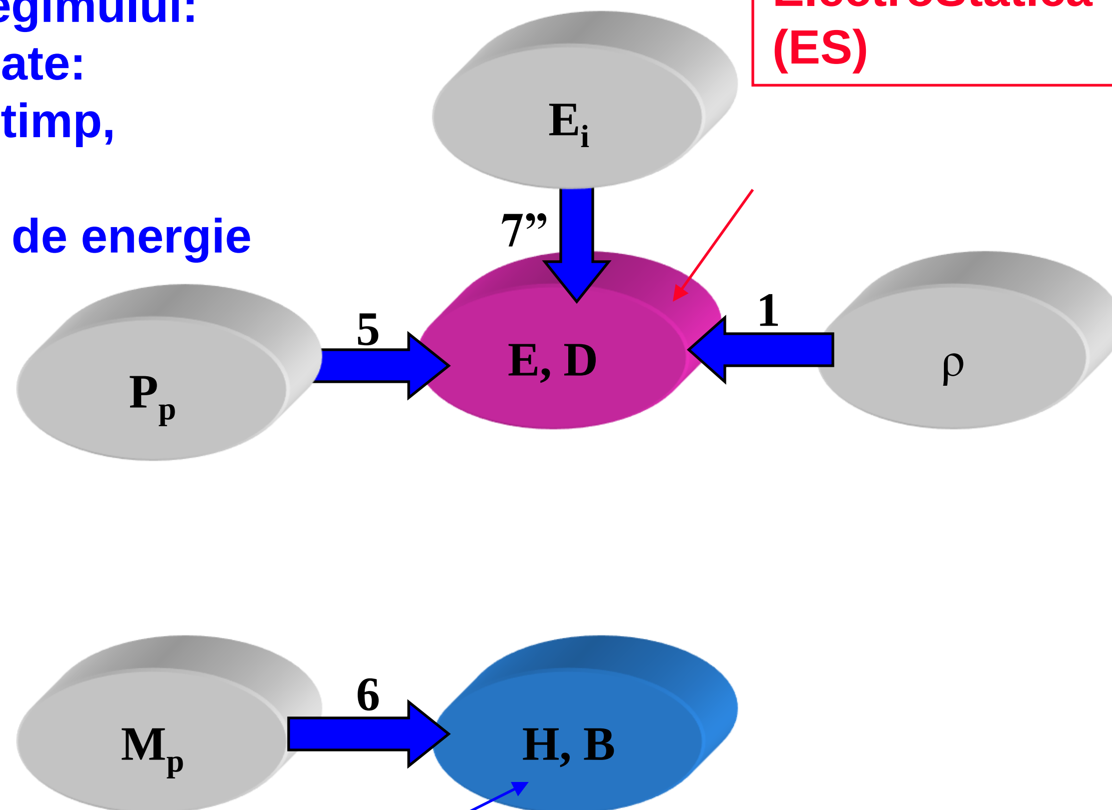
$$\cancel{7.\ \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i(\mathbf{E}))}$$

$$\cancel{8.\ p = \mathbf{EJ}}$$

$$\cancel{9.\ \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Ipotezele regimului: sunt eliminate:
-variatia in timp,
- miscarea
- transferul de energie (curentul)

ElectroStatica (ES)



Magneto- Statica (MS)

Diagrama se sparge in doua parti disjuncte: ES si MS.

Ecuatiile fundamentale ale regimurilor statice

- Ecuatiile de ordinul intai ale Electrostaticii (ES)

$$div\mathbf{D} = \rho; rot\mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = -gradV; \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p; (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\big|_{cond} = 0$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale Electrostaticii (ES)

$$div\mathbf{D} = \rho \Rightarrow div(\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p) = \rho \Rightarrow -div(\varepsilon gradV) = \rho - div\mathbf{P}_p \Rightarrow \boxed{-div(\varepsilon gradV) = \rho_t;}$$

$$\rho_t = \rho + \rho_p = \rho_t - -div\mathbf{P}_p; \varepsilon = ct \Rightarrow \Delta V = \rho_t / \varepsilon \text{ (Poisson)};$$

$$\rho_t = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \text{ (Laplace)}; \text{ Cond. de frontiera : V(P) - Dirichlet sau dV/dn - Neumann}$$

- Ecuatiile de ordinul intai ale Magnetostaticii (MS)

$$div\mathbf{B} = 0; rot\mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{H} = -gradV_m; \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale Magnetostaticii(MS)

$$div\mathbf{B} = 0 \Rightarrow div(\mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p) = 0 \Rightarrow \boxed{-div(\mu gradV_m) = \rho_m;} \rho_m = -\mu_0 div\mathbf{M}_p$$

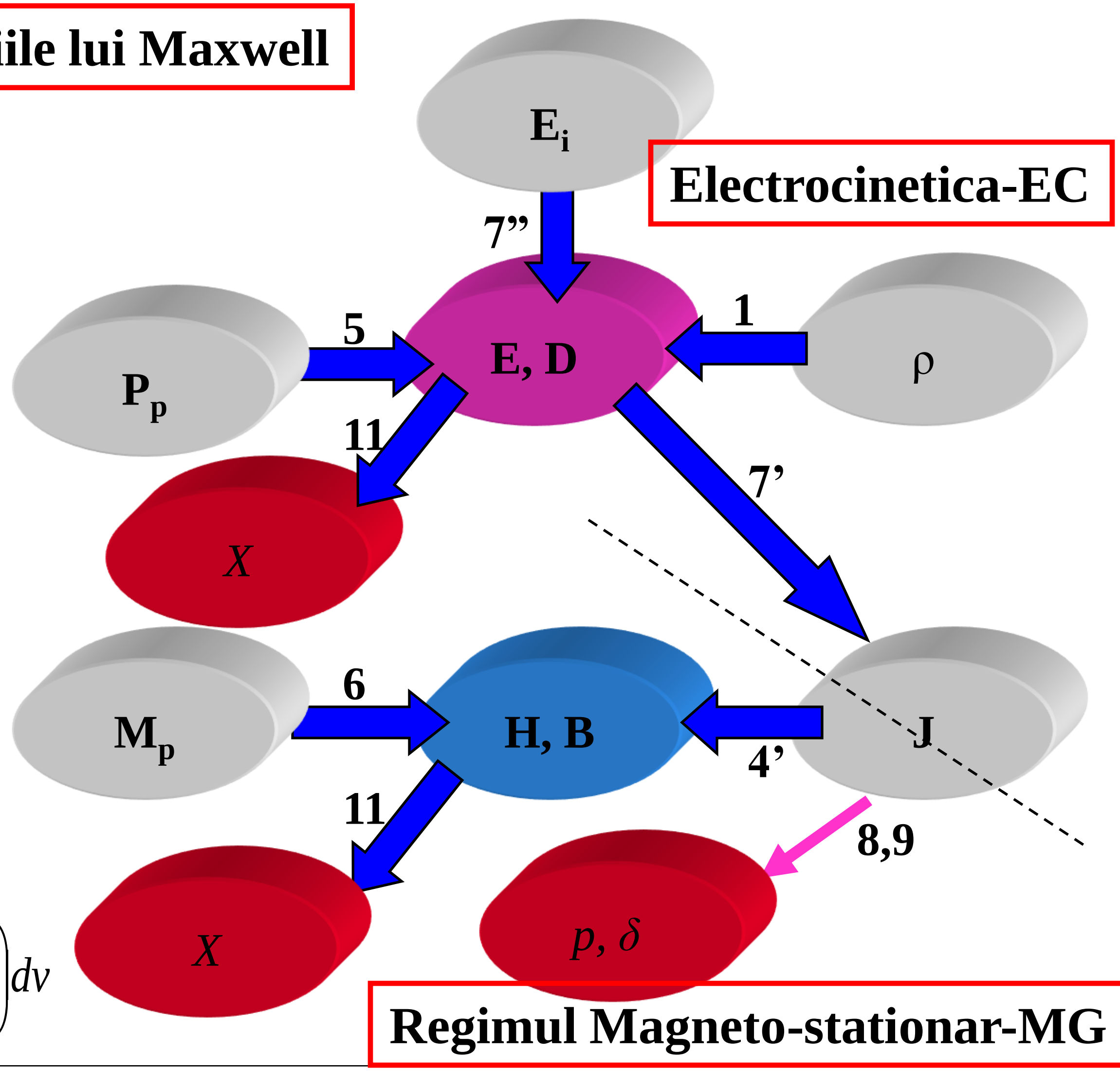
$$\mu = ct \Rightarrow \Delta V_m = \rho_m / \mu \text{(Poisson)}; M_p = 0 \Rightarrow \Delta V_m = 0 \text{ (Laplace)}$$

- **Modelul coulombian:** corpurile polarizate sau magnetizate produc acelasi camp ca o distributie fictiva de sarcini de polarizare/ magneitzare: $\rho_p; \rho_m$

Regimuri stationare

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
2. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
3. $\nabla \times \mathbf{E} = \cancel{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$
4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$
5. $\mathbf{D} = \varepsilon\, \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$
6. $\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$
7. $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$
8. $p = \mathbf{EJ}$
9. $\boldsymbol{\delta} = k\mathbf{J}$
10. $\nabla \cdot \mathbf{J} = \cancel{-\frac{\partial \rho}{\partial t}}$
11. $X_k = -\left.\frac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\right|_{q,\varphi=ct}, W_{em} = \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}\right) dv$

Ecuatiile lui Maxwell



Ecuatiile fundamentale ale regimurilor stationare

- Ecuatiile de ordinul intai ale Electrocineticii (EC)

$$div\mathbf{J}=0; rot\mathbf{E}=0 \Leftrightarrow \mathbf{E}=-gradV; \mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale Electrocineticii (EC)

$$div\mathbf{J}=0 \Rightarrow div(\sigma\mathbf{E}+\sigma\mathbf{E}_i)=0 \Rightarrow -div(\sigma gradV)=-div(\sigma\mathbf{E}_i) \Rightarrow \boxed{-div(\sigma gradV)=k;}$$

$$k=-div(\sigma\mathbf{E}_i); \sigma=ct \Rightarrow \Delta V=k/\sigma \text{ (Poisson)}; \mathbf{E}_i=0 \Rightarrow \Delta V=0 \text{ (Laplace)}$$

- Ecuatiile de ordinul intai ale campului Magnetostationar (MG)

$$div\mathbf{B}=0; rot\mathbf{H}=\mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{B}=rot\mathbf{A}; \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}_p \Leftrightarrow \mathbf{H}=(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{M}_p)/\mu$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale campului Magnetostationar (MG)

$$rot\mathbf{H}=\mathbf{J} \Rightarrow rot(\nu\mathbf{B}-\mu_0\nu\mathbf{M}_p)=\mathbf{J}; \Rightarrow \boxed{rot(\nu rot\mathbf{A})=\mathbf{J}+\mathbf{J}_m}; \mathbf{J}_m=rot(\mu_0\nu\mathbf{M}_p)$$

$$\nu=1/\mu; \mu=ct \Rightarrow rot(rot\mathbf{A})=\mu\mathbf{J}_t; \mathbf{J}_t=\mathbf{J}+\mathbf{J}_m \text{ (Ec. Poisson vectoriala)};$$

$$J_t=0 \Rightarrow rot(rot\mathbf{A})=0 \Rightarrow \Delta\mathbf{A}=0 \text{ (Ec. Laplace vectoriala)}$$

- **Modelul amperian:** corpurile magnetizate produc acelasi camp ca o distributie de curenti de magneitzare Jm fictivi.

Regimul magneto-cvasistationar-MQS

$1.\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\cancel{\rho}$

$2.\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0$

$3.\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$

$4.\ \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\cancel{\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}}$

$\cancel{5.\ \mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E}+\mathbf{P}_p}$

$6.\ \mathbf{B}=\mu\,\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}_p$

$7.\ \mathbf{J}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)$

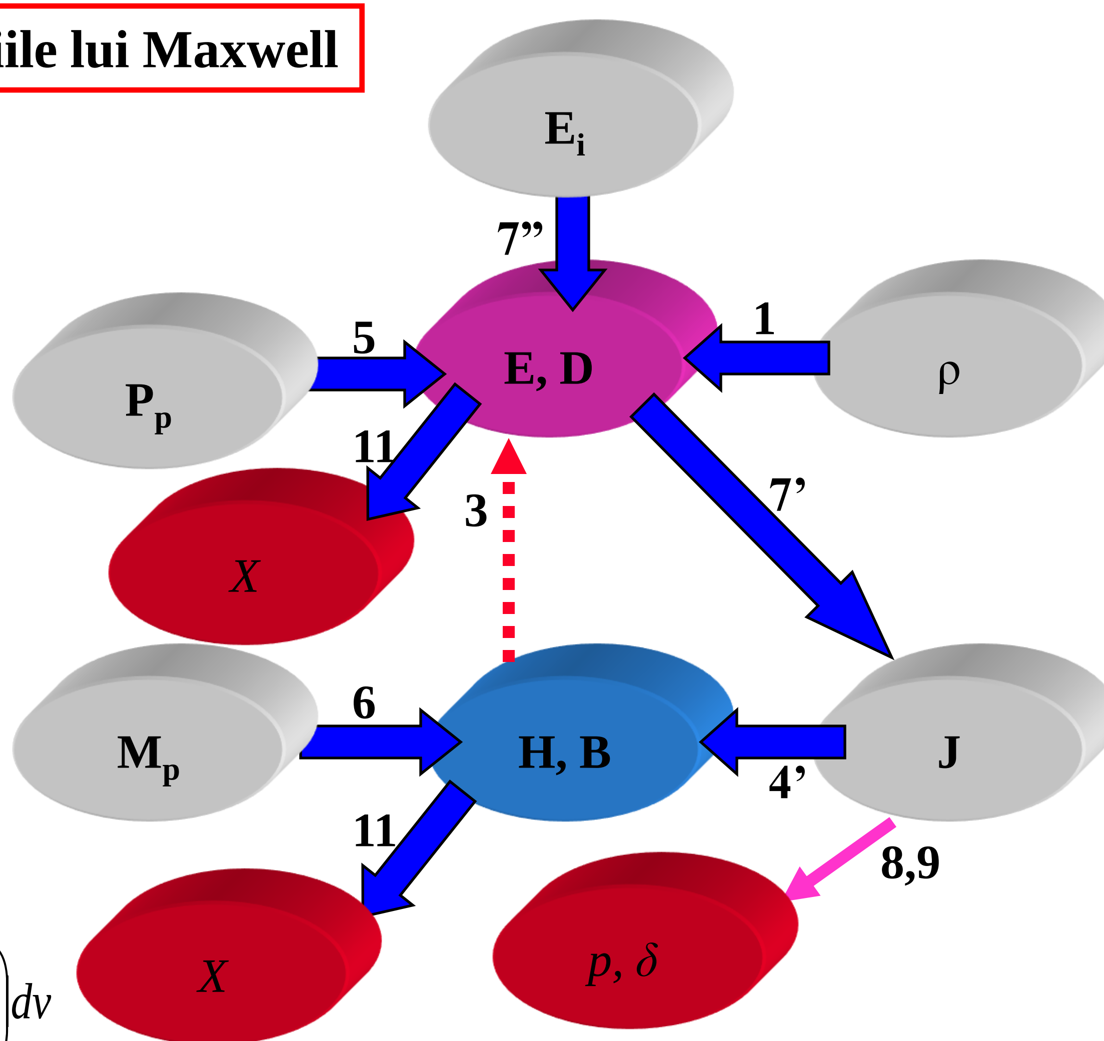
$8.\ p=\mathbf{EJ}$

$9.\ \boldsymbol{\delta}=k\mathbf{J}$

$10.\ \nabla\cdot\mathbf{J}=-\cancel{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}}$

$11.\ X_k=-\left.\dfrac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\right|_{q,\varphi=ct},\ W_{em}=\int_\Omega\left(\dfrac{\mathbf{DE}}{2}+\dfrac{\mathbf{BH}}{2}\right)dv$

Ecuatiile lui Maxwell



Regimul electro-cvasistationar-EQS

1. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

2. ~~$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$~~

3. $\nabla \times \mathbf{E} = \cancel{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$

4. $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

5. $\mathbf{D} = \varepsilon\, \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$

6. ~~$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$~~

7. $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$

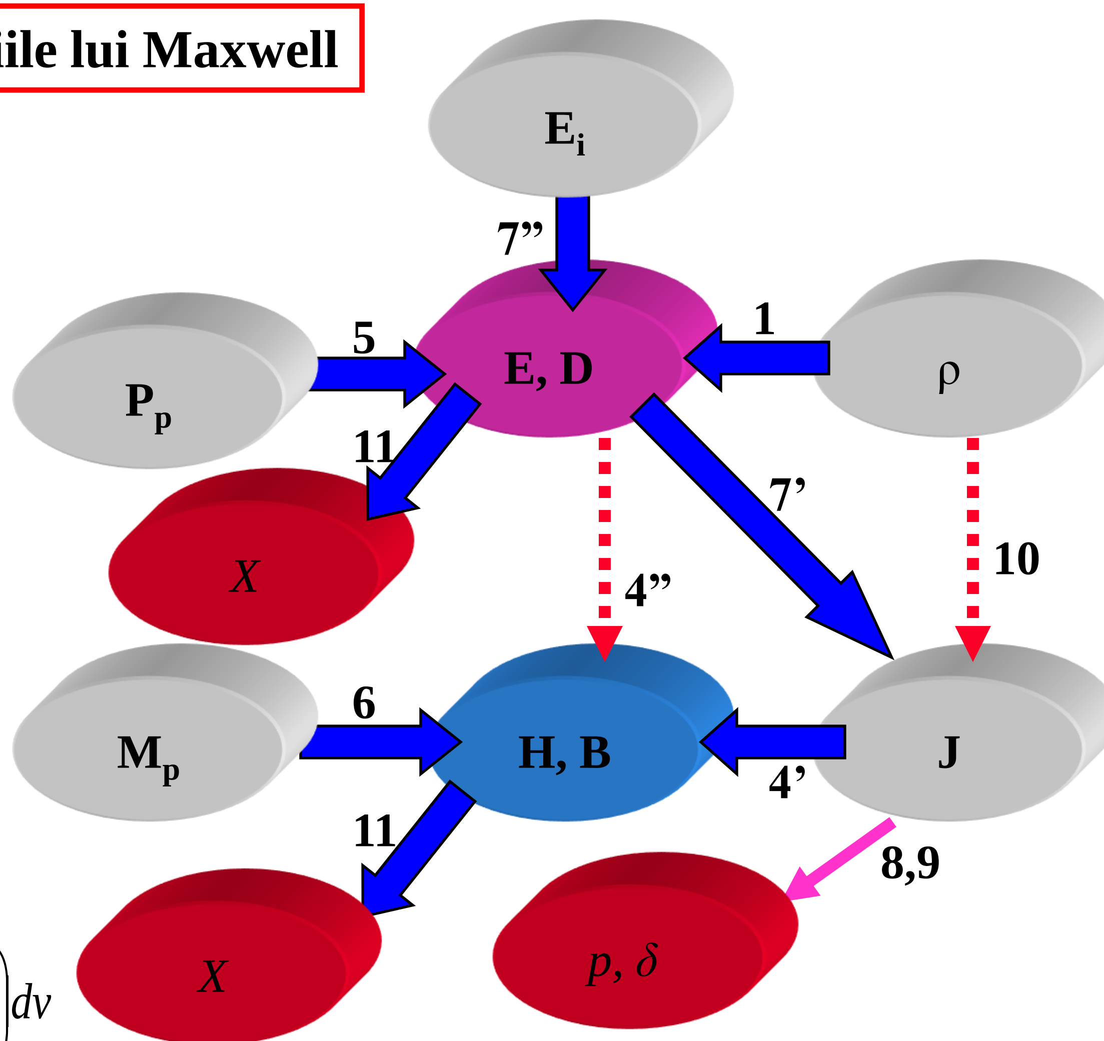
8. $p = \mathbf{EJ}$

9. $\boldsymbol{\delta} = k\mathbf{J}$

10. $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

11. $X_k = -\left.\frac{\partial W_{em}}{\partial x_k}\right|_{q,\varphi=ct}, W_{em} = \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2} \right) dv$

Ecuatiile lui Maxwell



Ecuatiile fundamentale ale regimurilor cvasistationare

- Ecuatiile de ordinul intai ale reg. Magneto-cvasistationar (MQS)

$$div\mathbf{B}=0 \Leftrightarrow \mathbf{B}=rot\mathbf{A}; rot\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; rot\mathbf{H}=\mathbf{J}; \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}; \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale reg. Magneto-cvasistationar (MQS)

$$rot\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \mu=ct \Rightarrow \boxed{rotrot\mathbf{E}=-\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \Rightarrow \tau=\mu\sigma L^2-\text{timp difuzie}$$

$$rot\mathbf{H}=\mathbf{J}; \sigma=ct \Rightarrow rotrot\mathbf{H}=\sigma rot\mathbf{E}=-\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \delta=\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \text{ adancime de patrundere}$$

de tip Helmhotz.

- Ecuatiile de ordinul intai ale reg. Eelctro-cvasistationar (EQS)

$$div\mathbf{D}=\rho; div\mathbf{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}; rot\mathbf{E}=0 \Leftrightarrow \mathbf{E}=-gradV; \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}; \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$$

$$div\mathbf{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow div(\sigma\mathbf{E})=-\frac{\partial div\mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow div(\sigma\mathbf{E})=-\frac{\partial div(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} \Rightarrow$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale reg. Eelctro-cvasistationar (EQS)

$$\boxed{-div(\sigma gradV+\varepsilon grad\frac{\partial V}{\partial t})=0} \Rightarrow \text{Constanta de timp de difuzie}: \tau=\varepsilon/\sigma$$

Ecuatiile fundamentale ale regimului general variabil

- Ecuatiile de ordinul intai ale reg. general (FW="full wave")

$$div\mathbf{D} = \rho; div\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = rot\mathbf{A}; rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow rot(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -gradV; rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}; \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

- Ecuatiile de ordinul doi ale reg. reg. general (FW="full wave")

in medii omogeme (d'Alambert):

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow rotrot\mathbf{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{rotrot\mathbf{H} = \sigma rot\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial rot\mathbf{E}}{\partial t} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}}$$

in medii fara pierderi (in vid) – viteza undei electromagnetice:

$$rotrot\mathbf{H} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta\mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow v_{\max} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \lambda = cT$$

Recapitularea regimurilor campului

- Regimul general variabil– fenomenul principal: propagarea campului, descrisa de ecuatii cu derivate partiale de tip hiperbolic in care intervin cel trei constante de material ε, μ, σ. Unda electromagnetica are viteza finita nu mai mare decat viteza luminii in vid.
- Regimurile cvasistationare – fenomenul principal: difuzia campului electromagnetic, descris de ecuatii cu derivate partiale de tip parabolic in care intervin doar doua constante de material μ, σ (MQS) sau ε, σ (EQS). Alte efecte: curentii turbionari, efectul pelicular, proximitate, reaxarea sarcinilor.
- Regimurile statice si stationare – fenomenul principal: distributia campului electric, magnetic sau de conductie, descrisa de ecuatii cu derivate partiale de tip eliptic, in care intervine doar cate o singura constanta de material, in functie de regim: ε (ES), μ(MS si MG) sau σ (EC). Regimurile studiaza distributia campurilor perturbata de proprietatile de material: polarizare, magnetizare, conductie.

Similitudinea intre regimurile statice si stationare

- Regimul electrostatic: $div\mathbf{D} = \rho \Rightarrow div(\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p) = \rho \Rightarrow -div(\varepsilon grad V) = \rho_t;$
- Regimul magnetostatic: $div\mathbf{B} = 0 \Rightarrow div(\mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p) = 0 \Rightarrow -div(\mu grad V_m) = \rho_m;$
- Regimul electrocinetic: $div\mathbf{J} = 0 \Rightarrow div(\sigma\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}_i) = 0 \Rightarrow -div(\sigma grad V) = k;$
- Regimul magneto-stationar: $div\mathbf{B} = 0; rot(\mathbf{B}/\mu - \mu_0\mathbf{M}_p/\mu) = \mathbf{J} \Rightarrow rot(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{A}) = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m;$

sunt similare. In consecinta:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{\psi}{u} \Rightarrow \boxed{\Lambda_m = 1/R_m = \frac{\varphi}{u_m} = C\Big|_{\varepsilon\to\mu}; G = 1/R = \frac{i}{u} = C\Big|_{\varepsilon\to\sigma}}$$

Odata rezolvata o problema intr-un regim, solutia poate fi transpusa prin similitudine si in celelalte regimuri.

In particular, in cazul campului uniform, sunt similare formulele:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \Leftrightarrow R_m = \frac{l}{\mu A}; \Lambda_m = \frac{\mu A}{l} \Leftrightarrow R = \frac{\rho l}{A}; G = 1/R = \frac{A}{\rho l} = \frac{\sigma A}{l}$$

- Pentru problemele de camp rezolvate, descrieti similarele in alte regimuri.

Problema analizei campurilor statice si stationare (opt.)

- Potentialul scalar satisface ecuatia Poisson generalizata

$$div\mathbf{D} = \rho \Rightarrow div(\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p) = \rho \Rightarrow -div(\varepsilon gradV) = \rho_t;$$

iar in particular, ecuatia Laplace. **Forma "slaba"** a acestor ecuatii se obtine prin proiectia lor pe o functie arbitrara:

$$-div(\varepsilon gradV) = \rho_t \Leftrightarrow -\int_\Omega u div(\varepsilon gradV)dv = \int_\Omega u\rho_t dv$$

$$div(u\varepsilon gradV) = udiv(\varepsilon gradV) + \varepsilon gradu gradV;$$

$$\int_\Omega \varepsilon gradu gradV dv - \int_\Omega div(u\varepsilon gradV)dv = \int_\Omega u\rho_t dv \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_\Omega \varepsilon gradu \cdot gradV dv = \int_\Omega u\rho_t v + \int_{\partial\Omega} \varepsilon u(dV/dn)dA; \forall u}$$

$$u = V \Rightarrow \int_\Omega \varepsilon (gradV)^2 dv = \int_\Omega V\rho_t dv + \int_{\partial\Omega} \varepsilon V(dV/dn)dA \Rightarrow$$

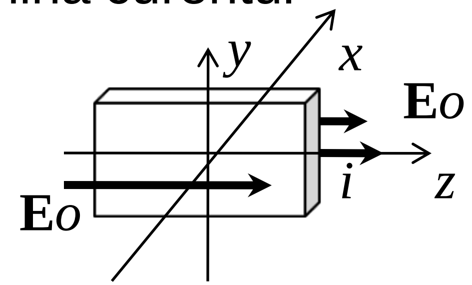
$$\int_\Omega \varepsilon (gradV)^2 dv = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V} = 0 \ \text{pt.} \rho_t = 0, V\big|_{S_D} = 0, dV/dn\big|_{S_N = \partial\Omega - S_D} = 0$$

Rezulta unicitatea solutiei ecuatiilor Poisson Laplace liniare in **conditiile de frontiera: Dirichlet (V) sau Neumann (d/dn)**

Aplicatii – Efectul pelicular (optional)

- Conductor masiv in regim MQS (cu parametri distribuiti)

Se considera o placa de grosime 2a, lungime h si latime L cu o tensiune electrica longitudinala U, care se anuleaza. Se va determina curentul



$$rotrot\mathbf{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \mathbf{E} = \mathbf{k}E(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}$$

Prin separarea variabilelor:

$$E(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X''T = \mu\sigma XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \mu\sigma\frac{T'}{T} = ct = -\lambda^2 \Rightarrow$$

$$X'' = -\lambda^2 X \Rightarrow X(x) = \cos\lambda x; \cos\lambda(\pm a) = 0 \Rightarrow \lambda = (2k+1)\pi/2a$$

$$\mu\sigma T' = -\lambda^2 T \Rightarrow T(t) = C\exp(-\mu\sigma t/\lambda^2) \Rightarrow E(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a} e^{-\frac{\mu\sigma}{\lambda^2}t}$$

$$t = 0 \Rightarrow E(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a} = E_0 = U/h; Fourier \Rightarrow$$

$$C_k = \frac{2E_0}{a}\int_0^a \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx = \frac{2E_0(-1)^k}{(2k+1)\pi}; i(t) = 2\sigma L\int_0^a E(x,t)dx = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2a\sigma LE_0}{(2k+1)^2}e^{-\frac{\mu\sigma}{\lambda^2}}$$

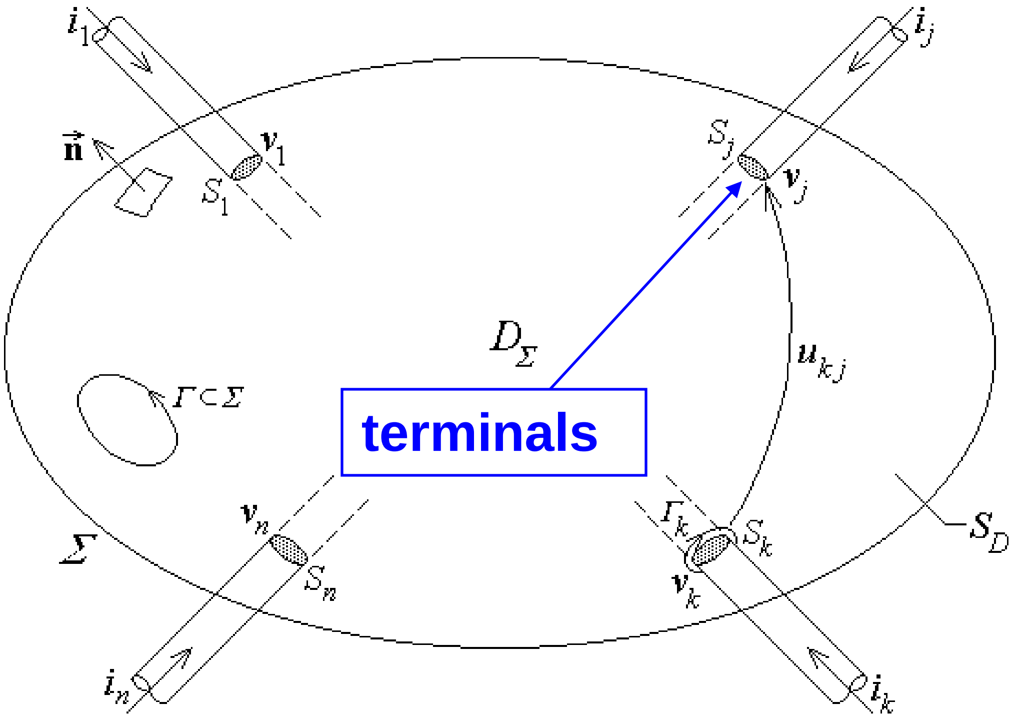
3.14. Elementul de circuit multipolar cu parametri distribuiti (optional)

Este definit ca un domeniu simplu conex cu urmatoarele conditi de frontiera:

A: fara cuplaj magnetic;

B: conexiune electrica doar prin terminale,

C: care sunt echipotentiale



A: $$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}(M,t)}{\partial t} = 0 \quad , \quad M \in \Sigma$$

B: $$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad , \quad M \in S_D = \Sigma \setminus \bigcup_{k=1}^{k=n} S_k$$

C: $$\mathbf{n} \times \boldsymbol{E}(M,t) = 0 \quad , \quad M \in S_k \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Fundamentarea teoriei circuitelor electrice (optional)

Pe frontiera:

- **conservarea curentului** $\oint_{\Sigma}\left(\mathrm{J}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\Sigma}(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{D_\Sigma}\left[\mathrm{div}\left(\mathbf{rot}\,\mathrm{H}\right)\right]\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$
- **t.e.m nula (A: ➔)**

$$\oint_{\Gamma\subset\Sigma}\mathrm{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma}(\mathbf{rot}\,\mathrm{E})\cdot\mathbf{n}\,dS = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

Marimile globale caracteristice:

- **Curenti in terminale:** $i_k =_{def} \oint_{\Gamma_k}\mathrm{H}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{S_k}(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot\mathbf{n}dS = -\int_{S_k}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}dS$
- **Potentialele term.:**

$$u_{kj}(t) =_{def} \int_{C_{kj}\in\Sigma}\mathrm{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{kj}\in\Sigma}\mathrm{E}_t\cdot d\mathbf{r} = v_k(t) - v_j(t)$$

C: ➔

$$\int_{MN\subset S_k}\mathrm{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{MN\subset S_k}\mathrm{E}_t\cdot d\mathbf{r} = v(M,t) - v(N,t) = 0$$

Relatiile Kirchhoff :

K1 (B:➔)

$$0 = \int_{S_D}\left(\mathrm{J}+\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{S_D}(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot\mathbf{n}\,dS + \sum_{k=1}^{n}\int_{S_k}(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot\mathbf{n}dS = 0 + \sum_{k=1}^{n}(-i_k) \Rightarrow \boxed{\sum_{b\in\Sigma} i_b = 0}$$

K2 (A:➔)

$$\oint_{\Gamma\subset\Sigma}\mathrm{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{b\in\Gamma} u_b = 0}$$

Expresia puterii transferate pe la borne de un element multipolar

$$\int_{AB\subset\Sigma} \mathrm{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{AB}\subset\Sigma} \mathrm{E}_t \cdot d\mathbf{r} = v(A,t) - v(B,t) \quad \text{independent } \mathit{of} \ \ \mathrm{C}_{AB} \subset \Sigma \Rightarrow$$

$$(\exists) v : \Sigma \to \mathbf{R}, \ \text{s.t.} \mathbf{E}_t = -\mathbf{grad}\, v \qquad \mathbf{rot}\,(v\,\boldsymbol{H}) = (\mathbf{grad}\, v)\times \boldsymbol{H} + v\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H})$$

$$P_\Sigma = \oint_\Sigma (\mathrm{E}\times\mathrm{H})\cdot(-\mathbf{n})\,dS = -\oint_\Sigma [(-\mathbf{grad}\, v)\times \mathrm{H}]\cdot(-\mathbf{n})\,dS =$$

$$\oint_\Sigma [\mathbf{rot}\,(v\,\mathrm{H})]\cdot \mathbf{n}\, dS - \oint_\Sigma [v\,(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})]\cdot \mathbf{n}\, dS =$$

$$0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} [v\,(\mathbf{rot}\,\mathrm{H})]\cdot \mathbf{n}\, dS = \sum_{k=1}^{n} v_k \int_{S_k} (\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot \mathbf{n}\, dS =$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \int_{S_k} (\mathbf{rot}\,\mathrm{H})\cdot \mathbf{n}\, dS = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k \Rightarrow \boxed{P_\Sigma = \sum_{k=1}^{k=n} v_k\, i_k}$$

P are sensul conventional comun cu cel al curentilor!

Relatia constitutiva a elmentelor multipolare cu parametri distribuiti

Cazul excitatiilor in potentiale:
- Excitatiii (semnale de intrare): $\int_{C_{kn}\in\Sigma} \mathrm{E}_t \cdot d\mathbf{r} = v_k(t)$ — Date pt $k = 1,2, \ldots, n\text{-}1$
- Raspunsuri (semnale de iesire): $i_k = \oint_{\Gamma_k} \mathrm{H} \cdot d\mathbf{r}$ — Calculate din solutia de camp pt. $k = 1,2, \ldots, n$

Se considera un domeniu D cu mediu liniar fara surse permanente (D=εE, B=μH, J=σE), conditii initiale nule si conditii de frontieara date de A, B, C si excitatii.

Poblema fundamentala este corect formulata si este simplificata astfel: surse de camp: **v** = [v1, v2, .., vn-1], raspunsuri **i** = [i1, i2, …, in-1].

Relatia intrare-iesire **i = Y v** este descrisa de admitanta **Y**, un operator liniar, bine definit datorita unicitatii si superpozitiei. Aceasta afirmatie este o consecinta a lemei solutiei triviale pentru elementul multipolar de circuit electric: excitatiile nule produc raspunsuri nule. **v** = 0 ➔ **i** = 0:

$$\int_D \sigma \mathrm{E}^2 dV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_\Sigma}\left(\mu \mathrm{H}^2 + \varepsilon \mathrm{E}^2\right)dV = \oint_\Sigma (\mathrm{E}\times\mathrm{H})\cdot(-\mathbf{n})dS = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k 0 \Rightarrow$$

$$0 \le \int_{D_\Sigma}\left(\mu \mathrm{H}^2 + \varepsilon \mathrm{E}^2\right)dV = -2\int_0^t \int_D \sigma \mathrm{E}^2 dV \le 0 \Rightarrow \mathrm{H} = 0 \Rightarrow i_k = 0$$

In cazul dual al excitatiilor in curent: **v =Z i** , Z este operatorul de impedanta. Determinarea modului in care Y sau Z depind de datele geometrice si de material necesita modelarea campului elctromagnetic (rezolvarea unei probleme de camp).

3.15. Modelarea numerica a campului electromagnetic (optional)

Anterior, problemele de camp au fost rezolvate cu **metode analitice**. Aceasta abordare poate fi aplicata doar la rezolvarea problemelor cu geometrie simpla. Problemele complicate intalnite in practica inginereasca pot fi rezolvate doar cu ajutorul tehnicii de calcul prin **metode numerice.**

Studentilor le sunt utile urmatoarele cunostinte si deprinderi:

- Sa inteleaga modul in care functioneaza programele de calculator pentru analiza numerica a campului electromagnetic si sa poata **realiza programe simple** dedicate rezolvarii unor probleme foarte simple de camp ;

–

- Sa stie care sunt **principalele functii ale unui program** profesional de analiza electromagnetica (CAD-Magnetics) si sa aiba o experienta minimala in folosirea unui astfel de program.

http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_electrodynamics
http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element http://www.comsol.com/
http://en.wikipedia.org/wiki/COMSOL_Multiphysics

[MNIE] D. Ioan et al, *Metode numerice in ingineria electrica*, MATRIX ROM 1998

Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

Programele de analiza numerica campului electromagnetic sunt structurate in:

- **Preprocesare:** modulul prin intermediul caruia se descrie problema de camp ce va fi rezolvata.

- Modulul care modulul care **discretizeaza** domeniul spatial (si cel temporal daca intervine) si apoi discretizeaza ecuatiile cu derivate partiale ale campului, generand un sistem de ecuatii cu un numar finit de necunoscute.

- **Solverul**: modul care rezolva sistemul de ecuatii obtinut in urma discretizarii.

- **Postprocesorul:** modulul in care se prelucreaza solutia numerica obtinuta in vederea vizualizarii ei, salvarii, imprimarii sau calculului marimilor derivate de care este interesat utilizatorul.

Descrierea unei probleme de camp presupune descrierea **geometriei**, a **materilelor** (prin constantele de material) si a **surselor de camp** de marimi dedicate iar sursele externe prin **conditiile de frontiera**. Starea initiala este descrisa de **conditiile initiale**. Modul cel mai eficient de descriere a geometriei este prin intermediul unui editor grafic, interacitv, iar restul datelor sunt selectate din baza de date interna sau introduse ca texte. Descrierea poate fi facuta si neinteractiv printr-un limbaj dedicat.

Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

• Cele mai simple probleme de camp sunt cele din medii **liniare**, in regimuri **statice sau stationare.** O simplifcare majora este adusa, daca problema este plan-paralela, adica solutia sa depinde doar de doua coordonate carteziene (x,y) si nu de toate trei (x,y,z) . In primul caz problema este bidimensionala (**2D**) iar in al doilea ea este tridimensionala (**3D**). Regimurile din aceasta categorie au ecuatii similare Poisson generalizate (de tip eliptic) este suficienta prezentarea unuia din cazuri, de exemplu regimul electrostatic sau elctocinetic. Domeniul de calcul este alcatuit din subdomenii omogene. **Datele problemei**:

- **geometria** problemei: forma si dimensiunile fiecarui subdomeniu;
- valoarea **constantelor de material ε** din fiecare subdomeniu;
- valoare **sursei de camp ρ** din fiecare subdomeniu;
- frontiera se descompune in parti disjuncte, iar pentru fiecare se specifica **tipul (Dirichlet sau Neumann) si valorea conditiei de frontiera**.

• Scrieti un **program MATLAB care permite descrierea unei probleme de camp stationar intr-un domeniu 2D** alcatuit prin reuniunea unor dreptunghiuri cu laturi paralel cu axel Ox si Oy. Scopul este de a rezolva problemele de test: calculul rezistentei unei folii patrate si a uneia de forma literei L.

Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

- Ecuatiile campului pot fi discretizate is rezolvate prin mai multe **tehnici**:
  - **Metoda elementelor finite (FEM)** – Domeniul spatial se descompune in forme geometrice simple (triunghiuri, tetraedre, hexaedre, etc.) iar in fiecare se presupune o variatii simpla a solutiei (de exemplu afina fata de x, y, z). Necunoscutele problemei (gradele de libertate) sunt parametrii ce identifica solutia din fiecare element finit sau chiar valoarea solutiei in nodurile retelei de discretizare sau in alte elemente geometrice ale retelei (muchii, fete). Pentru a genera sistemul de ecuatii algebrice liniare satisfacut de acesti parametri se foloseste forma slaba a ecuatiei, obtinuta prin proiectie (Galerkin) sau echivalent prin minimizare (variationala – Ritz). Se parcurg elementele si se adauga contributia lor la matricea sistemului si la termenul liber: sub-matrice de 3x3 si respectiv sub-vectori cu 3 componente, in cazul elementelor finite triunghiulare de ordinul unu. Se parcurg apoi laturile de pe frontiera si se adauga contributia lor la matricea sistemului (2x2 pentru cond. Neumann) si la termenul liber.
  - [MNCE] http://www.lmn.pub.ro/~gabriela/studenti/an4/carte_MNCE.pdf
  - http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem_50/fem_50.html

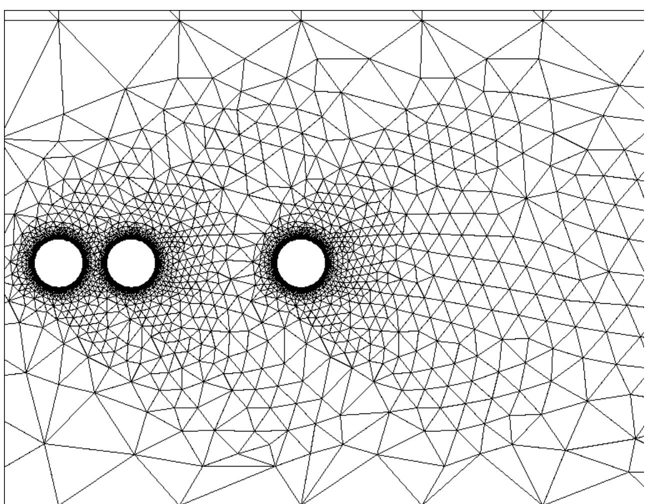
Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

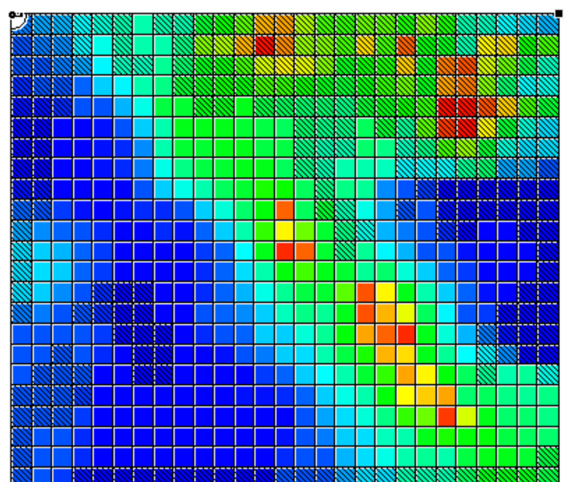
- **Metode de tip diferente finite (FDM), integrale finite, volume finite**. In aceasta abordare se folosesc de regula retele de discretizare structurate (cu topologie regulata) iar gradel de libertate sunt valorile solutiei in nodurile retelei. In FDM sistemul discret de ecuatii se obtine prin aproximarea derivatelor spatiale cu diferenta:

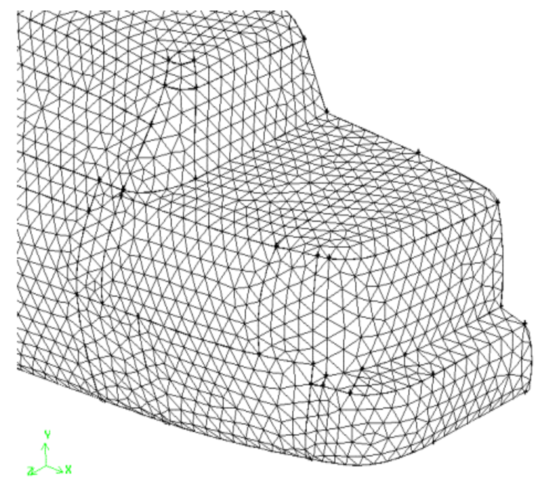
$$\frac{dV}{dx} \cong \frac{V_{k+1} - V_k}{h}; \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} \cong \frac{V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1}}{h^2} \Rightarrow \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{V_{ij+1} + V_{ij-1} + V_{i-1j} + V_{i-1j} - 4V_{ij}}{h^2}$$

In Tehnica integralelor Finite (FIT) se discretizeaza forma globala a ecuatiilor.

– Retele de discretizare pentru: FEM, FDM si BEM







Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

- **Metoda elementelor de frontiera (BEM)** are ca necnoscute (grade de libertate) valorile solutiei in nodurile de pe frontiera domeniului de calcul. De aceasta data se discretizeaza doar aceasta frontiera (curba in cazul 2D si suprafat in 3D). Sistemul finit de ecuatii se obtine prin discretizara ecuatiilor integrale ale problemei, forme echivalente ale ecuatiilor cu derivate partiale. http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_element_method

- Dupa discretizare, se obtin **sisteme de ecuatii algebrice liniare**, care in metodele FEM si FDM/FIT au matricele foarte rare (dupa acum s-a vazut in fiecare ecuatie genrata cu FDM sunt cel mult cinci termeni nenuli). Din acest motiv, rezolvarea se face rapid, chiar daca sistemele sunt de dimensiuni foarte mari. In cazul FEM matricea sistemului este simetrica, pozitiv definita si diagonal dominanta, ceea ce face ca rezolvarea sa se poate face foarte eficient prin metode iterative, care au un consum minim de memorie, pentru ca nu genereaza umpleri.

- Cunoscand valorile solutiei, de exemplu potentialul scalar in nodurile retelei de discretizare la FEM si FDM, se calculeaza in etapa de postprocesare si alte **marimi derivate**: intensitatea campului, tensiuni, fluxuri, rezistente, forte,etc.

Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

- Continuati scrierea **programului MATLAB** capabil sa calculeze rezististenta unei folii de forma literei L (cu FEM sau FDM). Folositi ca model si referinta de validare programul MATLAB FEM cu 50 de instructiuni, [MNCE] si [MNIE]. Exindeti programul pentru a rezolva clase cat mai largi de probleme in modul cel mai eficient (consum mic de memorie si timp de calcul)
- Mai dificila este rezolvarea problemelor de **camp stationar in medii neliniare.** In urma discretizarii se obtine un sistem de ecuatii neliniare. Pentru rezolvarea lor se folosesc metode iterative, cum este de exemplu metoda Newton-Raphson http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method

La fiecare iteratie se rezolva o problema liniara de camp in care constantele de material (petrmitivitate, permeabilitate, conductanta) sunt cele dinamice (derivata caracteristicii neliniare dielectrice, magnetice sau de conductie)

- In **regimurile cvasistationare sau general variabile,** dupa discretizarea spatiala cu una din metodele prezentate anterior se obtine un sistem de ecuatii diferentiale ordinare, care se rezolva prin cuadratura numerica.

http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_ordinary_differential_equations

- Mai “simpla” este problema de **curent alternativ,** care se reprezinta in complex.

Aplicatii. FEM in 20 linii de cod MATLAB [MNIE].

```
infile % citeste din scriptul .m: na,nb,nc(1:ne); x,y,z(1:nn); nf,vf(1:nnf)
 A = zeros(nnod,nnod); b = zeros(nnod); v = b; % matrice sistem si termen liber
 for i = 1:ne % parcurge elemenetle si aduna contributia lor la matricea A
       n1 = na(i); n2 = nb(i); n3 = nc(i)]; % nodurile . . .
       x1=x(n1); x2=x(n2); x3=x(n3); y1=y(n1); y2=y(n2); y3=y(n3); cordonatele
       S = (x2*y3-x3*y2-x1*y3+x3*y1+x1*y2-x2*y1)/2 % si aria elementului curent
       c1=y2-y3; c2=y3-y1; c3=y1-y2; di=x3-x2; d2=x1-x3; d3=x2-x1;% proiectii laturi
       % contributiile (3x3) la matricea A ale elementului curent:
       c11=(c1*c1+d1*d1)/(4*A); c12=(c1*c2+d1*d2)/(4*A); c13=(c1*c3+d1*d3)/(4*A);
       c21=(c2*c1+d2*d1)/(4*A); c22=(c2*c2+d2*d2)/(4*A); c23=(c2*c3+d2*d3)/(4*A);
-      c31=(c3*c1+d3*d1)/(4*A); c32=(c3*c2+d3*d2)/(4*A); c33=(c3*c3+d3*d3)/(4*A);
       A(n1,n1)=A(n1,n1)+c11; A(n1,n2)=A(n1,n2)+c12; A(n1,n3)=A(n1,n3)+c13;
       A(n2,n1)=A(n2,n1)+c21; A(n2,n2)=A(n2,n2)+c22; A(n2,n3)=A(n2,n3)+c23;
       A(n3,n1)=A(n3,n1)+c31; A(n3,n2)=A(n3,n2)+c32; A(n3,n3)=A(n3,n3)+c33;
       for i=1:nnf % parcurge nodurile de pe frontiera cu cond. Dirichlet
          n=nf; v(n)=vf(i); b(n)=v(n); n nod pe frontiera, vf valoare cond.Dirichlet
          for j = 1:nnod % inlocuieste ecuatia nodului n cu: Vn = val_cond_fr.
              a(n,j)=0; if (j~=n & a(j,n) ~=0) b(j)=b(j)-a(jn,n)v(n); a(j,n)=0; end
          end; a(n,n) = 1;
       end; v=A\b; % solutia problemei: potentialele in nodurile retelei
```

FDM sub 20 linii de cod MATLAB [MNIE].

```
% Rezolva ecuatia lui Laplace intr-un patrat cu conditii Dirichlet pe froniera
infile % citeste din scriptul .m: nn - nr_noduri pe latura, Vst,Vdr,Vjs,Vss
% - conditii de frontiera, err eroare relativa impusa,  nit - nr maxim de iteratii
V = zeros(nn,nn); % V - solutia: potentialele nodurilor retelei
V(:,1)=Vst; V(:,nn)=Vdr; V(1,:)=Vss; V(nn,:)=Vjs; impune conditiile Dirichlet
for k = 1:it  % ciclul de iteratii pentru rezolvarea sistemului liniar
eps = 0; % initalizarea normei corectiei
        for i = 2:nn-1  % parcurge nodurile interioare
                 for j = 2:nn-1
                          Vnou = (V(i-1,j)+ V(i+1,j)+ V(i,j-1)+ V(i,j+1))/4;
-                         d = abs(Vnou-V(i,j)); V(i,j) = Vnou; % corecteaza solutia
                          if d>eps eps = d end end end % eps = norma max a corectiei
if eps < err*max(abs(V))  break end  % nu e necesara memorarea matricei sistemului!
surfc(V) % post-procesare: potentialul, echipotentialele
h=1; [Ex,Ey]=-gradient(V,h); quiver(Ex,Ey); % intensitatea campului electric
```

MATLAB are si alte functii utile: `G=numgrid(s,n)` numeroteaza in G(`nxn`) nodurile dintr-o retea 2D de forma indicata de `s`; `spy(G)` arata nodurile; iar `A=delsq(G)` intoarce matricea laplaceanului discretizat (`delsqdemo.m` demonstreaza rezolvarea ecuatiei Poisson cu conditii de frontiera Dirichlet in domeniul de forma literei L). Cu acestea, codul anterior se rescrie in 5 linii scurte. **Incercati!**

BEM sub 20 linii de cod MATLAB [MNIE].

```
% Rezolva ecuatia lui Laplace pentru potentialul electrostatic intr-un domeniu 2D
% cu conditii Dirichlet si calculeaza sarcina de pe elementele de frontiera
infile % preprocesare, citeste din scriptul .m: nf - nr_de elemente de frontiera,
% xi,yi,xf,yf,v(1:n) - coordonatele initiale/finale si potentialul fiecarui element
% eps - valorea constantei de material (permitivitatea)
for k = 1:nf  % parcurge elementele de frontiera
        za = xi(k)+j*+yi(k); zb = xf(k)+j*+yf(k); % afixul initial/final al elm k
        for n = 1:nf % parcurge perechile de elemente de frontiera
                zn = (xi(n)+xf(n))+j*(yi(n)+yf(n))/2; % afixul mediu al elm n
                        if k==n A(k,k)=abs(za-zb)* Real((1-log(zn-zb)));
-                       elseif    % genereaza matricea A a sistemului liniar
      A(k,n)=(abs(za-zb)*Real(((zn-za)*log((zn-zb)/(zn-za))/(zb-za)+1-log(zn-zb)));
                         end
        end
end
q = A\v/(2*pi*eps); % rezolva sistemul Aq=v si calculeaza sarcinile de pe elemente
q0=0; for k = 1:nf if (v(k)==0) q0=q0+q(k); end; q0 % post procesare: sarcina masei
```

Expresia potentilului logaritmic, al unui fir infinit, iar prin superpozitie de o banda cu $\rho_s$ct:

$$V=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{C_{ab}}\rho_s\ln(1/R)ds \Rightarrow V_k=\sum_n A_{kn}q_n;\, A_{kn}=\frac{|z_a-z_b|}{2\pi\varepsilon}\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{z_n-z_a}{z_b-z_a}\ln\frac{z_n-z_b}{z_n-z_b}+1-\ln(z_n-z_b)\right)\right\}$$

Modelarea numerica a campului electromagnetic (cont.)

• Dintre metodele numerice, cea mai des utilizata in simularea campului eelctromagnetic este **metoda elemntelor finite FEM.** Explicatiile sunt: flexibilitate maxima in descrierea geometriei, a suprafetelor cube si proprietati bune ale matricei sistemului: rara, simetrica, pozitiv definita si diagonal dominanta. Acestea fac ca rezolvarea sa fie eficienta temporal si spatial (mem.)

• Performantele unui program de camp depind, mai ales in cazul 3D, de modul in care se realizeaza **discretizarea automata a domeniului** de calcul. http://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_generation

MATLAB are functia `delaunay` pentru generarea retelelor triunghiulare.

• O lista de pachete software publice si comerciale pentru analiza campului este postata in http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages

• Dintre cele publice mentionam FEMM: http://www.femm.info/wiki/HomePage

• iar dintre cele comerciale ANSYS si COMSOL:

http://en.wikipedia.org/wiki/ANSYS

http://en.wikipedia.org/wiki/COMSOL_Multiphysics

COMSOL – Interfata cu utilizatorul, functii

La intrare , poate aleage: dimensiunea problemei:
(1D, 1.5D-unidimensional axisimetric, 2D, 2.5D- bidimensional axisimetric sau 3D) dar si regimul campului electromagnetic:
stationar, c.a. sau tranzitoriu (ES, MS, EC, MG, MQS, FW=RF).

O caracteristica specifica pachetului COMSOL este caracterul sau **mutifizic,** permitiand rezolvarea de probleme cuplate, din cele mai diverse domenii: electromagnetice, termice, mecanice, de curgere, acustice. Cu aceasta ocazie se poate alege si ordinul elementlului fnit, intre 1 si 5 (implicit 2).
Ecranul principal contine bare de comenzi (meniu), instrumente, o fereastra de mesaje dar cea mai mare parte a ecranului este ocupata de fereastra editorului grafic.

Principalele intrari in meniu sunt cele clasice: File, Edit, Options, Help si cele specifice: Draw (editarea geometriei pe cale grafic- interactiva sau prin comenzi textuale), Physics (descrierea proprietatilor de natura fizica, pe subdomenii, frontiere si in puncte: constante de material si conditii de frontiera), Mesh (discretizarea automata si controlata a domenului si rafinarea retelei), Solve (alegerea metodei de rezolvare a sitemului discretizat, a parametrilor metodei si rezolvarea acestui sistem), Postprocessing (afisarea numerica si grafica in mai multe metode a solutiei precum si definirea si calculul diferitelor marimi fizice drivate, definite ca integrale pe subdomenii, frontiere sau in puncte), Multiphysics (cuplarea problemelor).

COMSOL - Exemplu: rezistenta foliei L

Draw: Se decriu doua dreptunghiri de 2X1 si 1x1, cu colturile (-1,0), (0,0) care apoi s ereunesc intr-un domeniu comn.

Physics: Se specifca valoarea conductivitatii (implicit Cu-5.99e7S/m) si se descriu conditiile de frontiera: izolnt electric pe 4 segmente, la masa un segment si valoare potentialului V=1V pe segmentul superior.

Mesh: Inializare retea – genereaza automat o retea de 735 triunghiuri cu 400 noduri din care 71 pe frontiera (1534 grade de libertate).

Solve: implicit cu metoda directa de matrice rare UMFPACK, care obtine solutia in 0.125s.

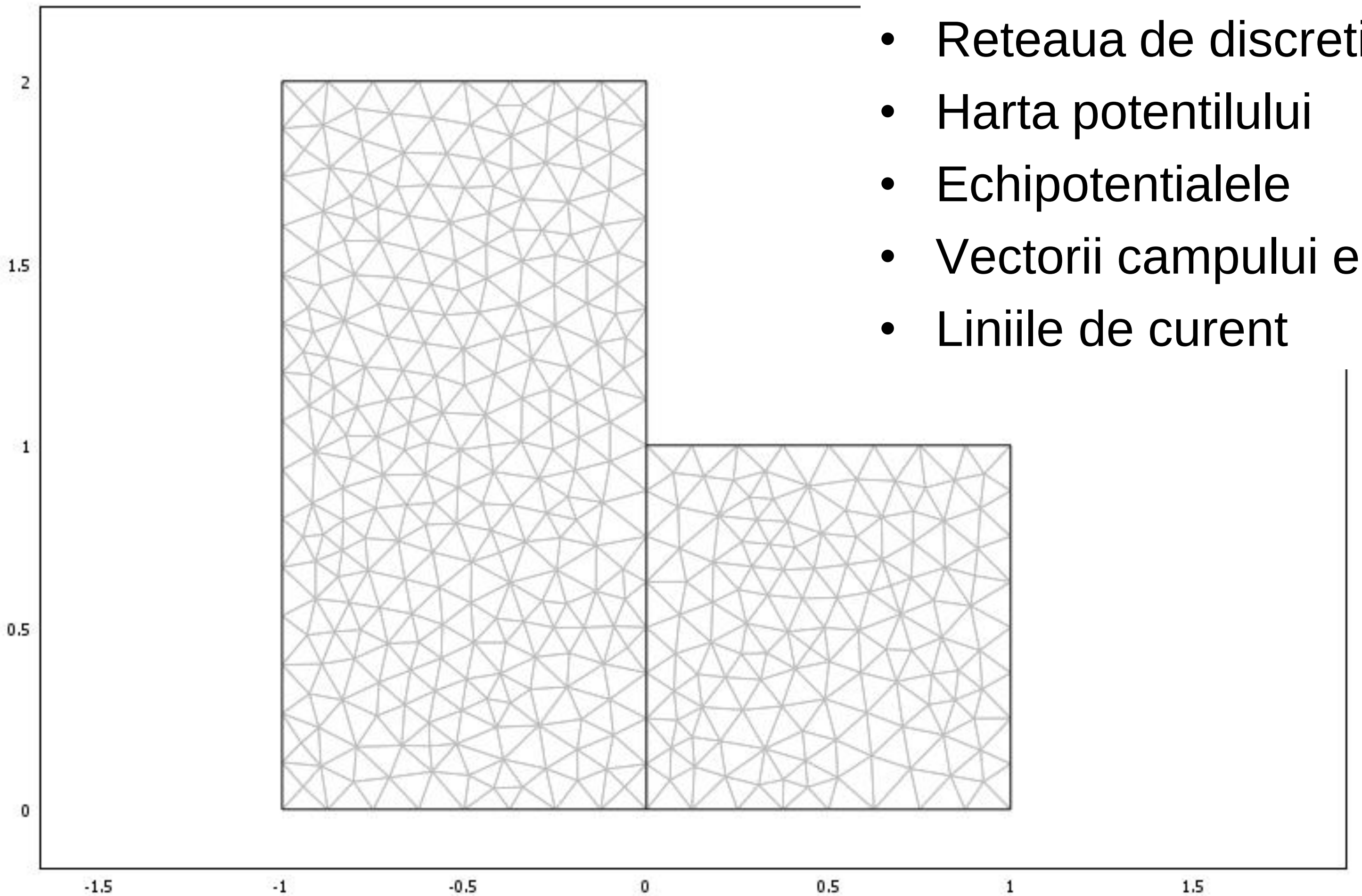
Postprocessing: se reprezenta grafic solutia in mai multe forme. Se calculeaaza valoarea pentru conductanta lineica prin integrarea curentullui pe terminal. S-a obtinut G=I/V= **2.343567e7**S/m =σΛ ➔ Λ= 0.3912 ➔ 1/Λ = 2.5559

File: se salveaza problema in Lshape.m si se genereaza raportul Lshape.html

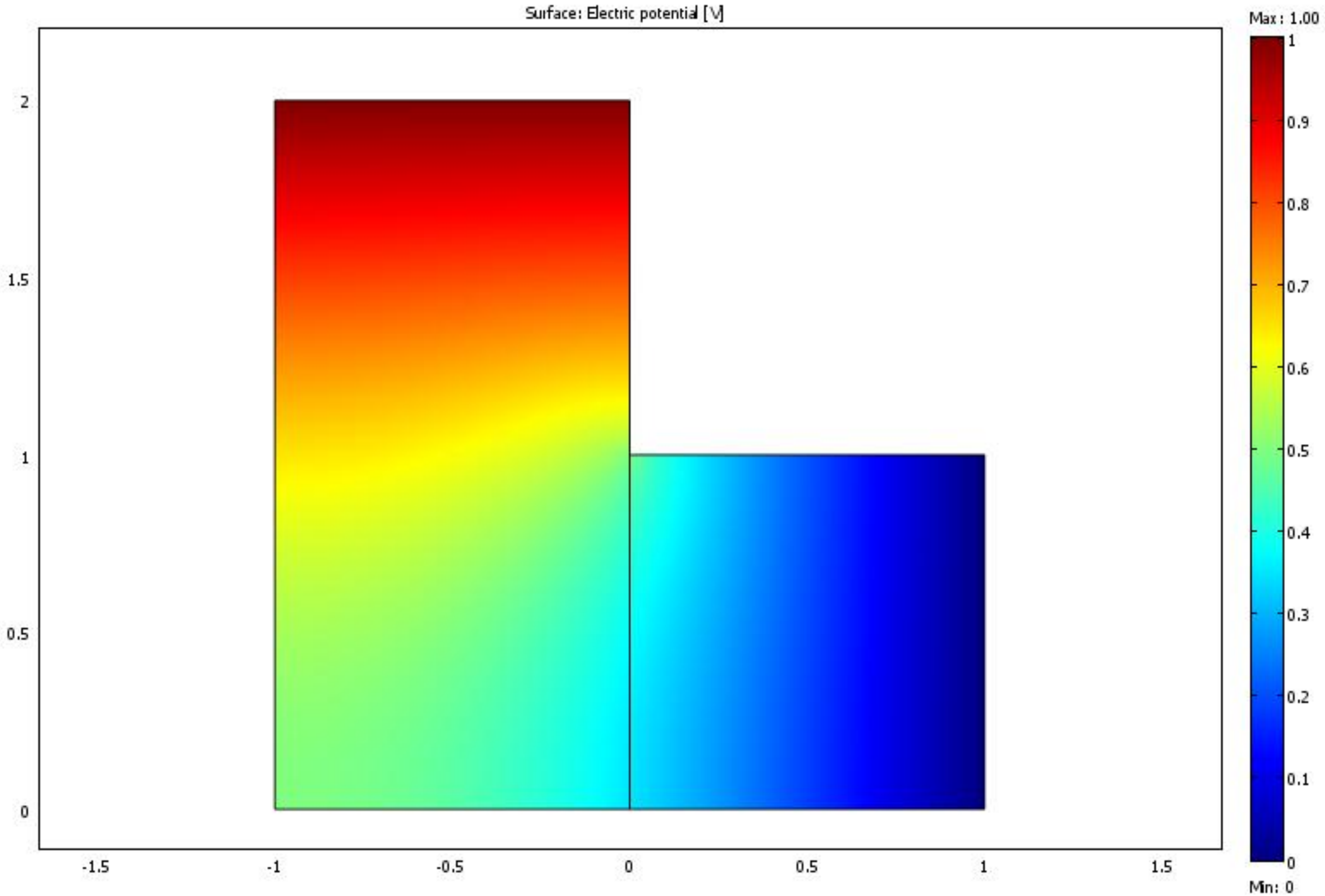
COMSOL - Exemplu: rezistenta foliei L (cont.)

Reprezentarea grafica a solutiei:

- Reteaua de discretizare
- Harta potentilului
- Echipotentialele
- Vectorii campului electric
- Liniile de curent



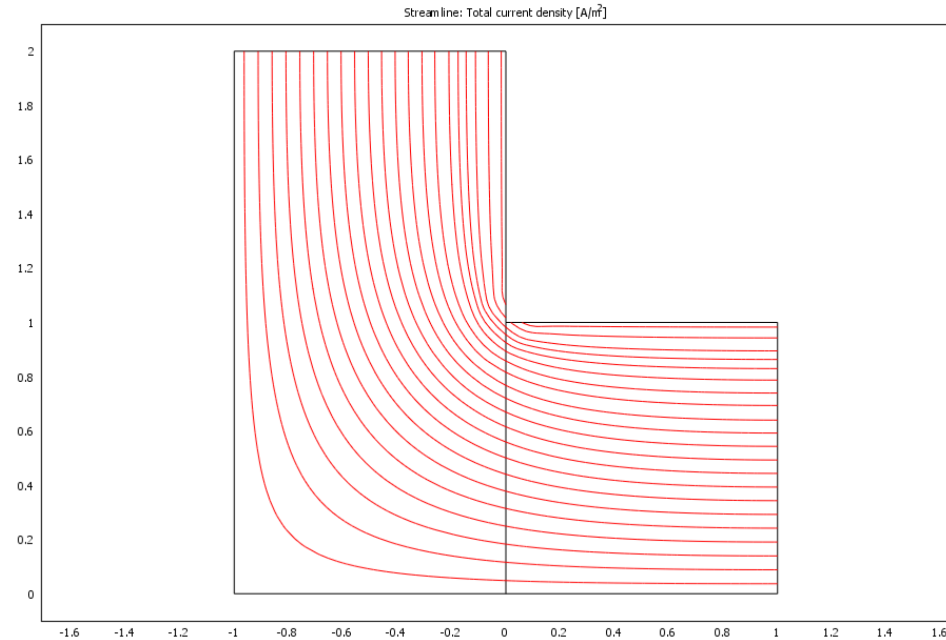
COMSOL - Exemplu: rezistenta foliei L (cont.)

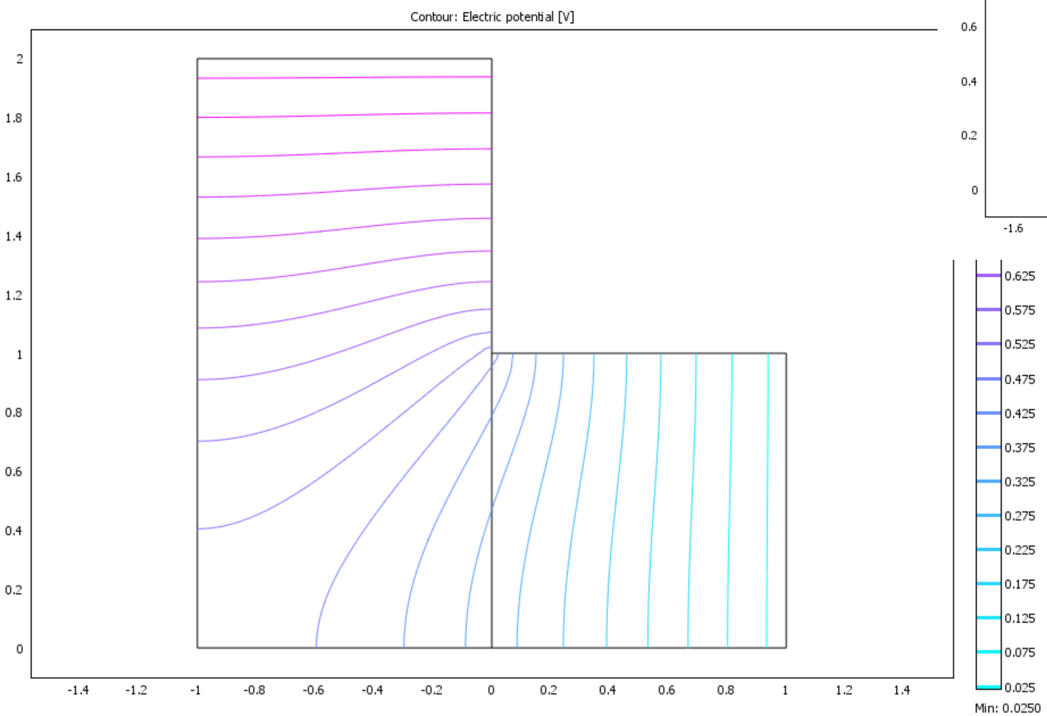


Harta in culori a potentialului

COMSOL - Exemplu: rezistenta foliei L (cont.)

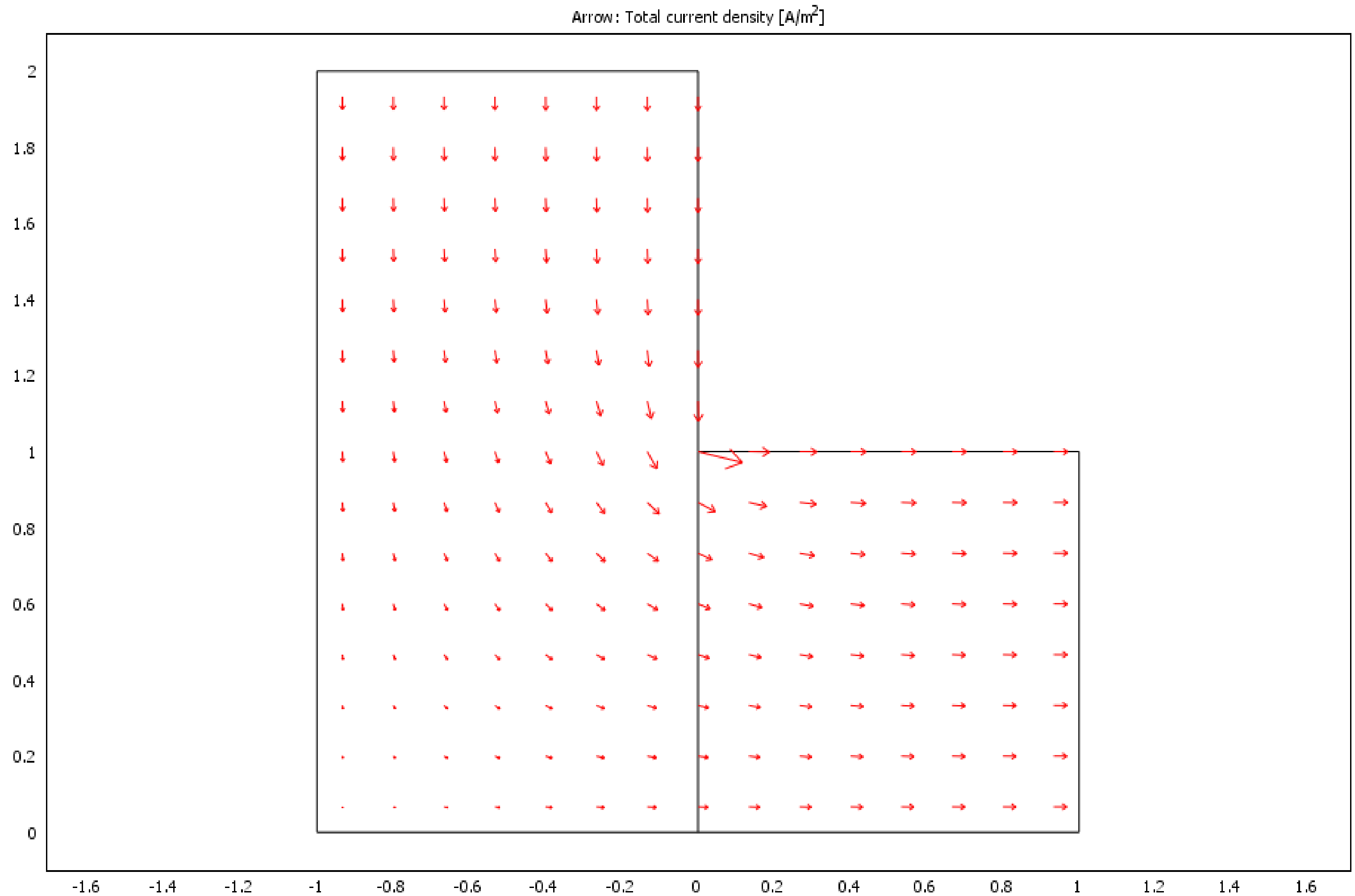
Echipotentialele si liniile de camp





COMSOL - Exemplu: rezistenta foliei L (cont.)

Vectorii campului electric



3.16. Concluzii

- Teoremele fundamnetale ale campului eelctromagnetic au o **importanta practica** asemanatoare cu cea a legilor.
- Ele evidentiaza relatiile de **conservare**, pentru marimi electromagnetice, cum sunt: sarcina, curentul, energia dar si altele.
- Teoremele descriu cantitativ functionarea dispozitiveleor si componentleor electrice, cum sunt **condensatoarele, rezistoarele si bobinele**. Se-au stabilit formele globale ale legilor de material si relatiile u-I pentru aceste dispozitive.
- S-au evidentiat **efectele meacanice ale campului electromagnetic**, definidu-se marimile primitive, prin indicarea procedeului lor de masurare.
- S-a fundamentat riguros **teoria circuitelor electrice**, care intr-o serie de ipoteze simplificatoare este o sub-teorie a electromagnetismului.
- A fost **formulata problema de analiza a campului electromagnetic** aratandu-se importanta ei si descriind principalele ei metode de rezolvare.
- Orice proiect avansat de inginerie electrica necesita modelarea elctromagneitca si folosirea unui pachet **software dedicat**.

3.17. Referinte

Lista bibliografica: http://www.emie.ugal.ro/curstce/10%20-%20Bibliografie.pdf

Cursuri disponibile pe net:

1. Carmen Schiopu – Electromagnetism
http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Carmen_Schiopu_-_Electromagnetism/
http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Emil_Petrescu_-_Fizica_1/Cap7.pdf
2. Marian Pearsica – Electrotehnica-
http://www.afahc.ro/invatamant/electro/electro_b.pdf
3. Cursuri APRS – **http://ham.aprs.ro/Cursuri/**
4. Sergiu Ivas TEORIA MACROSCOPICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC
– **http://www.emie.ugal.ro/curset.html**
Electrotehnica si electronica**: http://www.emie.ugal.ro/curs_ee.html**
5. T. Leuca Chestiuni speciale de Elecgtrotehnica
http://webhost.uoradea.ro/tleuca/Chestiuni%20speciale%20de%20Electrotehnica.pdf
6. Gh Mandru – Bazele electrotehnicii
http://www.scribd.com/doc/36642484/Bazele-electrotehnicii-Mandru
7. A. Moraru – Bazele electrotehnici
http://www.infocarti.ro/A.Moraru_BE1_TCElmg/
http://www.infocarti.ro/A.Moraru_BE1_TCElmg/cap1.pdf .../cap23.pdf